第五讲 子空间分析（2）

李宇峰
liyf@nju.edu.cn
人工智能学院

子空间分析

子空间，顾名思义，就是选择整个空间的一部分加以处理。

- 如何建立 两个子空间 的投影关系，计算子空间的距离？
- 如何利用子空间分离 信号（“好”东西）和噪声（“坏”东西）？
- …

子空间分析

- 投影分析
- 信号子空间和噪声子空间

子空间分析

子空间，顾名思义，就是选择整个空间的一部分加以处理。

- 如何建立 两个子空间 的投影关系，计算子空间的距离？

投影分析

投影分析

在许多工程应用和理论研究（譬如无线通信、雷达、声纳、时间序列和信号处理等）中，许多问题的最优求解一个本质的问题是：提取某些所希望的信号或特征，而抑制或过滤掉其他所有干扰、杂波或者噪声。投影是解决这类问题的一个极为重要的数学工具。

投影分析：一个例子

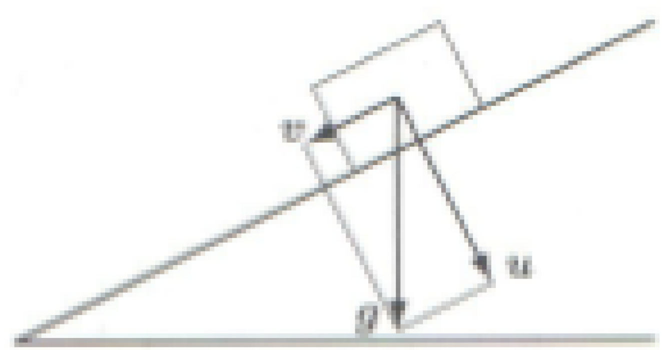
物体的重力g垂直向下，它可以分解为两个分量：一个与下面垂直，为物体的压力u；另一个与斜面平行，为物体的下滑力v，即有$g = u + v$. 由于压力u与下滑力相互垂直，所以重力的分解$g = u + v$是所谓正交分解。

如果定义斜面的法线方向为w, 则压力u可视为重力g在w上的投影, 记成

$$u = P_w g$$

而与压力u垂直的下滑力v是g在$w^{\perp}$上的正交投影，记作

$$v = P_{w^{\perp}} g$$



物体重力分解

投影算子

投影算子的意义和性质 设

$$R^n = W \oplus V \qquad (6.1)$$

为空间R^n的一种分解，则任何n维向量$x \in R^n$都可以唯一地表示成

$$x = w + v, \qquad w \in W, v \in V$$

定义：今规定算子P

$$Px = w, \qquad x \in R^n, w \in W$$

我们把从R^n到子空间W的这种变换（或映射）P称为从R^n到子空间W上的投影，并称P为一投影算子。

投影算子

定义：投影算子$\boldsymbol{P}$把整个空间$\boldsymbol{R}^n$变换成子空间$\boldsymbol{W}$，也就是若$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$, 则$\boldsymbol{Px} = \boldsymbol{x}$, 即算子$\boldsymbol{P}$作用于子空间$\boldsymbol{W}$中的向量时，结果不变。这就是说

$$\boldsymbol{PW} = \boldsymbol{W}$$

因此我们又称$\boldsymbol{W}$为算子$\boldsymbol{P}$的不变子空间。

在一般情况下，我们称$\boldsymbol{w}$为$\boldsymbol{x}$在子空间$\boldsymbol{W}$上的像，而称$\boldsymbol{W}$为算子$\boldsymbol{P}$的像空间。由于对任何$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, 都有

$$\boldsymbol{Pv} = \boldsymbol{0}$$

所以，称$\boldsymbol{V}$为算子$\boldsymbol{P}$的零空间，记作$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{P})$.

投影算子

算子P具有下列重要性质：

（1）算子P具有线性性质，即对任意的向量$x, y \in R^n$, 以及任意的实数λ和μ，恒有

$$P(\lambda x + \mu y) = \lambda P(x) + \mu P(y)$$

所以又称P是线性算子。

（2）算子P具有等幂性，即$P^2 = P$.

证明 对任意的$x \in R^n, x = w + v, w \in W, v \in V$,

$$P^2 x = PPx = Pw = w = Px$$

由于x的任意性，所以$P^2 = P$.

投影算子

定理6.2 设P为定义在R^n上的任一线性算子，其像在R^n内，要其为一投影算子的充要条件是：P为等幂算子（矩阵）.

证明： 容易看出，若P为等幂矩阵，那么P仅有特征值1或者0. 为方便起见，假设$n \times n$投影矩阵P有r个特征值为1，另外n-r个为0. 可以证明等幂矩阵一定是可对角矩阵，即总存在非奇异矩阵

$U = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$和$V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$使得

$$\mathrm{P} = [u_1, u_2, \cdots, u_n] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

投影算子

$$\mathrm{P} = [u_1, u_2, \cdots, u_n] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

于是投影矩阵可以写成

$$P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i v_i^T = \sum_{i=1}^{r} u_i v_i^T$$

考查任意一个$n \times 1$向量x的投影$y = Px$, 则

$$y = Px = \sum_{i=1}^{r} u_i v_i^T x = \sum_{i=1}^{r} (v_i^T x) u_i$$

投影算子

这个表达式揭示了投影矩阵的本质特性：

(1) 向量x经过投影矩阵P的投影后，向量x与投影矩阵中具有特征值1的特征向量相关的部分$x^T v_i (i = 1,2,\cdots,r)$在投影结果$Px$中完整保留；

(2) 向量x与投影矩阵中具有特征值为0的特征向量部分$x^T v_i (i = r+1,2,\cdots,n)$被投影矩阵全部抵消，不出现在投影结果$Px$中。

也就是说，当矩阵P为只有特征值0或1的等幂矩阵时，变换的结果Px是向量x在P的那些具有特征值1的特征向量上的投影$(x^T v_i)u_i (i = 1,2,\cdots,r)$的叠加。

直接和=》正交补=》正交投影变换

直接和 =》 正交补

投影变换 =》 正交投影变换

【正交投影变换】定义：设W是n维酉空间C^n的一个子空间，$W^{\perp}$为其正交补空间，我们有正交分解

$$C^n = W \oplus W^{\perp} \qquad (6.3)$$

由子空间W所确定的这种分解规定了从C^n沿$W^{\perp}$到W的投影变换，称之为正交投影变换。这种投影变换为W所唯一确定, 可以记成P_W, 以示它与W的关系，P_W的正交补投影变换可以表示成$P_{W^{\perp}}$。

正交投影变换

投影变换必为等幂变换，反之亦然。正交投影变换当然是等幂变换，因为它是投影变换，但仅有等幂性不够，需要进一步的性质。

定理6.3 定义在酉空间C^n上的等幂变换P为正交投影变换的充要条件是：P为自伴变换(即$P^H = P$）.

证明：先证明正交投影变换必为自伴变换。设与正交投影变换相应的空间分解是

$$C^n = R(P) \oplus R(P)^{\perp}.$$

正交投影变换

对$\forall x, y \in C^n$, 且$x = w_1 + v_1$, $y = w_2 + v_2$, 其中$w_1, w_2 \in R(P)$, $v_1, v_2 \in R(P)^{\perp}$.
于是$(Px, y) = (Pw_1, w_2 + v_2) = (w_1, w_2)$, $(x, Py) = (w_1 + v_1, Pw_2) = (w_1, w_2)$,
所以推得$(Px, y) = (x, Py)$恒成立，所以P为自伴变换.

反之，若等幂变换P为自伴变换，则要证明P为正交投影变换，也就是要证明
对$\forall v \in R(P)^{\perp}$必有$Pv = 0$.

证明：对$\forall x \in C^n$, 根据P的自伴性，恒有$0 = (Px, v) = (x, Pv)$, 即对一切x, 都
有$(x, Pv) = 0$, 所以必须$Pv = 0$. 故P是一个正交投影变换。

正交投影变换

投影变换的极值性质

定理6.4（投影定理）设V是内积空间，V_1是V的有限维子空间，则对$\forall \alpha \in V, \alpha$在$V_1$上的正交投影存在并且唯一。

证明 由于V_1存在唯一的正交补$V_1{}^{\perp}$使得

$$V = V_1 \oplus V_1{}^{\perp}$$

则$\forall \alpha \in V$总可以唯一地表示成$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，其中$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1{}^{\perp}$, 于是$\alpha_1$就是$\alpha$在$V_1$上的正交投影并且是唯一的.

正交投影变换

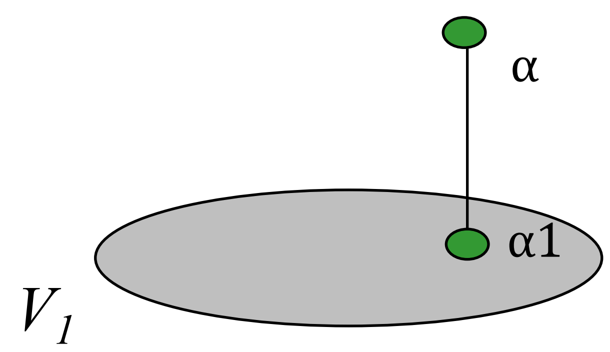
定义6.5 设V是内积空间，V_1是V的非空子集，$\alpha \in V$是给定的向量，如果存在$\alpha_1 \in V_1$满足如下等式

$$\|\alpha - \alpha_1\| = \inf_{\beta \in V_1} \|\alpha - \beta\| = d(\alpha, V_1)$$

则称α_1为α在V_1上的最佳逼近.

定理6.6 设V_1是内积空间V的一个子空间，$\alpha \in V$是给定的向量，则$\alpha_1 \in V_1$为α在V_1上的最佳逼近的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha - \alpha_1 \perp V_1}.$$



正交投影变换

证明 必要性：用反证法. 设$\alpha_1 \in V_1$为α在V_1上的最佳逼近，但$\alpha - \alpha_1$不正交于V_1, 则在V_1中至少有一向量$\beta \neq 0$且$\|\beta\| = 1$，使得$(\alpha - \alpha_1, \beta) = \delta \neq 0$. 令$\gamma = \alpha_1 + \delta\beta$，则 $\gamma \in V_1$，且有 $\|\alpha - \gamma\|^2 = (\alpha - \alpha_1 - \delta\beta, \alpha - \alpha_1 - \delta\beta) = \|\alpha - \alpha_1\|^2 - |\delta|^2$因为$|\delta|^2 > 0$, 所以$\|\alpha - \gamma\| < \|\alpha - \alpha_1\|$，这与$\alpha_1 \in V_1$为$\alpha$在$V_1$上的最佳逼近相矛盾，故$\alpha - \alpha_1 \perp V_1$.

充分性：如果 $\alpha_1 \in V_1$ 且 $\alpha - \alpha_1 \perp V_1$，则对任意 $\beta \in V_1$，有 $\|\alpha - \beta\|^2 = \|(\alpha - \alpha_1) + (\alpha_1 - \beta)\|^2 = \|\alpha - \alpha_1\|^2 + \|\alpha_1 - \beta\|^2 \geq \|\alpha - \alpha_1\|^2$，这就表明 $\alpha_1 \in V_1$ 是α在V_1上的最佳逼近.

定理给出了最佳逼近的特征，但没有解决最佳逼近的存在性

正交投影变换

定理6.7 设$\boldsymbol{V}$是内积空间，$\boldsymbol{V_1}$是$\boldsymbol{V}$的一个$\boldsymbol{m}$维子空间，则$\boldsymbol{V}$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{V_1}$上都有唯一的最佳逼近，并且$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{V_1}$上的最佳逼近是$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{V_1}$上的正交投影.

证明 由于V中任一向量α可唯一地表示成$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1{}^{\perp}$, 即$\alpha_1$是$\alpha$在$V_1$上的正交投影，因为$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 \perp V_1$, 故有定理6.6知$\alpha_1$是$\alpha$在$V_1$上的最佳逼近, 又因为$\alpha$在$V_1$上的正交投影$\alpha_1$是唯一的，因此$\alpha$在$V_1$上的最佳逼近是唯一的。

正交投影变换

下面讨论内积空间V中向量α在m维子空间V_1上最佳逼近构造

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$V_1$的一组基, 则对$\beta \in V_1$有

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$$

根据定理6.6知β是α在V_1上的最佳逼近当且仅当$\alpha - \beta \perp V_1$, 即

$$\alpha - \beta \perp \alpha_i, \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

正交投影变换

从而得到

$$(\alpha-\beta,\alpha_i)=(\alpha,\alpha_i)-\sum_{j=1}^{m}x_j(\alpha_j,\alpha_i)=0,\qquad i=1{:}\,m$$

于是得到方程组$\boldsymbol{Ax=b}$, 其中

$$A=G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)^T$$

$$=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \dots & (\alpha_1,\alpha_m)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \dots & (\alpha_2,\alpha_m)\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \dots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{bmatrix}$$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T,\quad b=((\alpha,\alpha_1),(\alpha,\alpha_2),\cdots,(\alpha,\alpha_m))^T.$

正交投影变换

由于$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，所以$A$为非奇异矩阵，故方程组$Ax = b$有唯一解$x$, 从而得到$\alpha$在$V_1$上的唯一最佳逼近

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m.$$

特别地，当$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$V_1$上的一组标准正交基时，其$Gram$矩阵是单位矩阵，则$\alpha$在$V_1$上的唯一最佳逼近

$$\beta = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + (\alpha, \alpha_2)\alpha_2 + \cdots + (\alpha, \alpha_m)\alpha_m.$$

正交投影变换

当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$V_1$上的一组标准正交基时，令

$$S=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m]$$

则系数向量

$$\begin{bmatrix}(\alpha,\alpha_1)\\(\alpha,\alpha_2)\\\vdots\\(\alpha,\alpha_m)\end{bmatrix}=S^T\alpha$$

则α在V_1上的唯一最佳逼近可以表示为

$$\beta=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_m)\alpha_m=SS^T\alpha$$

子空间距离-正交投影变换

定义 5.1.6 [46, p.76] 假定 S_1 和 S_2 是 $\mathbb{C}^n$ 的两个子空间，并且 $\dim(S_1) = \dim(S_2)$，则这两个子空间之间的距离定义为

$$\text{dist}(S_1, S_2) = \|\boldsymbol{P}_{S_1} - \boldsymbol{P}_{S_2}\|_{\text{F}} \tag{5.1.15}$$

式中，$\boldsymbol{P}_{S_i}$ 是到子空间 $S_i (i = 1, 2)$ 的正交投影算子。

SVD分解构造几个重要空间的投影

奇异值分解与矩阵A的有关空间有密切关系。也就是有

（7） 如果矩阵$A_{m\times n}$的秩为r，那么对应于A的奇异值分解

$A = U\Sigma V^H$, 那么就有下列结果：

1） $m\times n$酉矩阵U的前r列向量组成了矩阵A的列空间

$R(A) = \{y \in C^m \mid Ax = y, \forall x \in C^n\}$的标准正交基底；

2） U的后m-r列向量组成了A^H的零空间

$N(A^H) = \{x \in C^m \mid A^H x = 0\}$的标准正交基底；

3） $n\times n$酉矩阵V的前r列向量组成矩阵A的行空间$R(A^H)$的标准正交基底；

4） V的后n-r列组成矩阵A的零空间$N(A)$的标准正交基底。

SVD分解构造几个重要空间的投影

设A是一个$rank(A)=r$的$m\times n$实矩阵，则A的奇异值分解为

$$A=U\Sigma V^T.$$

即

$$AV=U\Sigma,$$

其中

$U=(u_1,u_2,\cdots,u_r,u_{r+1},\cdots,u_m),V=(v_1,v_2,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n)$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ & & \sigma_r & 0\\ & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

SVD分解构造几个重要空间的投影

由于$rank(A) = r$, 所以SVD分解$A = U\Sigma V^T$也可以表示成

$$A = U\Sigma V^T = [U_1 \colon U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}([V_1 \colon V_2])^T.$$

其中

$$U_1 = [u_1, u_2, \cdots, u_r], U_2 = [u_{r+1}, \cdots, u_m];$$
$$V_1 = [v_1, v_2, \cdots, v_r], V_2 = [v_{r+1}, \cdots, v_n];$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}_{r\times r}$$

SVD分解构造几个重要空间的投影

由于$A = U_1\Sigma_1{V_1}^T$, 令$B = \Sigma_1{V_1}^T \in R^{r\times n}$, 也就是说$A = U_1 B$完成了一个满秩分解，因此$R(A) = R(U_1)$, 故

（1）$u_1, u_2,\cdots, u_r$构成了$R(A)$标准正交基底；则${U_1U_1}^T$是A的像空间上的正交投影矩阵。

同样可以证明

（2）$u_{r+1},\cdots, u_m$构成了$N(A^T)$标准正交基底；${U_2U_2}^T$是$N(A^T)$上的正交投影矩阵。

（3）$v_1, v_2,\cdots, v_r$构成了$R(A^T)$标准正交基底；${V_1V_1}^T$是$R(A^T)$上的正交投影矩阵。

SVD分解构造几个重要空间的投影

（4） $v_{r+1},\cdots,v_n$构成了$N(A)$标准正交基底；$V_2{V_2}^T$是$N(A)$上的正交投影矩阵。

从上面的结论可以得到：

$$R(A^T)=N(A)^{\perp} \qquad R(A)=N(A^T)^{\perp}$$

$$\dim R(A)+\dim N(A^T)=m\,;$$

$$\dim R(A^T)+\dim N(A)=n\,;$$

$R(A)$与$R(A^T)$同构。

子空间分析

子空间，顾名思义，就是选择整个空间的一部分加以处理。

- 如何利用子空间分离 信号（“好”东西）和噪声（“坏”东西）？
- …

信号子空间与噪声子空间分离

信号子空间与噪声子空间

观测数据矩阵A不可避免地存在观测误差或者噪声。令

$$X = A + W = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, x_n] \in C^{m\times n}$$

为观测数据矩阵。其中，$x_i \in C^{m\times 1}$为观测数据向量（信号），而W表示加性观测误差矩阵（噪声）。

在信息科学与技术的多个领域中，观测数据矩阵的列空间

$$Span(X) = Span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

称为观测数据空间，而观测误差矩阵的列空间

$$Span(\mathrm{W}) = \mathrm{Span}\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \cdots, w_n\}$$

则称为噪声子空间.

如何分离信号和噪声？

信号子空间与噪声子空间

定义观测数据矩阵的协方差矩阵

$$R_x = E\{XX^H\} = E\{(A+W)(A+W)^H\}$$

假设误差矩阵$W = [w_1, w_2, \cdots, w_n]$与真实矩阵$A$统计不相关，则

$$R_x = E\{XX^H\} = E\{AA^H\} + E\{WW^H\}$$

令

$$R = E\{AA^H\} \text{ 和 } E\{WW^H\} = \sigma_w^2 I$$

这实际上是假设各观测噪声相互统计不相关，并且具有相同的方差σ_w^2. 于是有

$$R_x = R + \sigma_w^2 I$$

令$rank(A) = r$，则观测数据矩阵的协方差矩阵$R_x = E\{XX^H\}$的特征值分解

$$R_x = U\Sigma U^H + \sigma_w^2 I = U(\Sigma + \sigma_w^2 I)U^H = U\Pi U^H$$

信号子空间与噪声子空间

上式中

$$\Pi = \Sigma + \sigma_w^2 I = diag(\sigma_1^2 + \sigma_w^2, \cdots, \sigma_r^2 + \sigma_w^2, \sigma_w^2, \cdots, \sigma_w^2)$$

其中$\Sigma = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2, 0, \cdots, 0)$, 且$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2$为真实矩阵的自协方差矩阵$E\{AA^H\}$的非零特征值.

显然，如果信噪比足够大，即σ_r^2比σ_w^2明显大，则含噪声的自协方差矩阵R_x的前r个大特征值

$$\lambda_1 = \sigma_1^2 + \sigma_w^2, \cdots, \lambda_r = \sigma_r^2 + \sigma_w^2$$

称为主特征值(principal eigenvalue)

信号子空间与噪声子空间

而剩余的$m-r$个小特征值

$$\lambda_{r+1}=\sigma_w^2,\cdots,\lambda_m=\sigma_w^2$$

称为次特征值(minor eigenvalue).

于是，自协方差矩阵R_x的特征值分解可以改写为

$$R_x=[U_s,U_n]\begin{bmatrix}\Sigma_s & 0\\ 0 & \Sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_s^H\\ U_n^H\end{bmatrix}=S\Sigma_s S^H+G\Sigma_n G^H$$

其中

$$\mathrm{S}\triangleq[s_1,s_2,\cdots,s_r]=[u_1,u_2,\cdots,u_r]$$

$$G\triangleq[g_1,g_2,\cdots,g_{m-r}]=[u_{r+1},u_{r+2},\cdots,u_m]$$

$$\Sigma_s=diag(\sigma_1^2+\sigma_w^2,\cdots,\sigma_r^2+\sigma_w^2)\text{，}\ \Sigma_n=diag(\sigma_w^2,\cdots,\sigma_w^2)$$

因此，$m\times r$列直交矩阵S和m×$(m-r)$列直交矩阵G分别是与r个主特征值和$m-r$个次特征值对应的特征向量构成的矩阵.

信号子空间与噪声子空间

定义5.8 令S是与观测数据矩阵的自协方差矩阵的$\boldsymbol{r}$**个主特征值**$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$对应的特征向量矩阵，其列空间

$$Span(S)=Span\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$$

称为观测数据空间$Span(X)$的**信号子空间**。而与另外$\boldsymbol{m-r}$**个次特征值**（即噪声方差）对应的特征向量矩阵G的列空间

$$Span(G)=Span\{u_{r+1},u_{r+2},\cdots,u_m\}$$

称为观测数据空间的**噪声子空间**。

利用奇异值与特征值的关系，观测数据矩阵X的r个大奇异值对应的左奇异向量$u_1,u_2,\cdots,u_r$张成观测数据空间的信号子空间，其余小奇异值对应的左奇异向量$u_{r+1},\cdots,u_m$张成观测数据空间的噪声子空间。根据条件数的分析，观测数据矩阵X的奇异值分解比协方差矩阵$R_x=E\{XX^H\}$的特征值分解具有更好的数值稳定性

信号子空间与噪声子空间

学习信号子空间和噪声子空间具有重要意义，主要体现在以下几个方面：

信号处理与特征提取

- **分离信号与噪声**：信号子空间和噪声子空间提供了一种将观测信号中的有效信号和噪声分离的方法。**通过对观测数据进行分析，将其分解到信号子空间和噪声子空间中，可以更准确地提取出信号的特征，去除噪声的干扰**。例如，在语音信号处理中，能够将语音信号从背景噪声中分离出来，提高语音识别的准确率。
- **特征提取与压缩**：信号子空间往往包含了信号的主要特征信息。**通过将信号投影到信号子空间，可以实现对信号的特征提取和压缩。**在图像识别中，可以利用信号子空间来提取图像的关键特征，减少数据量，提高处理效率，同时保持图像的主要识别信息。

子空间分析

- 投影分析
- 信号子空间和噪声子空间