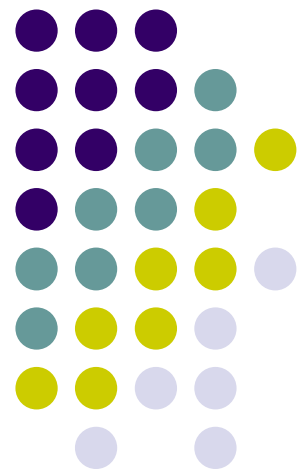


循环群与群同构

离散数学—代数结构

南京大学计算机科学与技术系





循环群与群同构

- 循环群与生成元
- 循环群的子群
- 群的同构与同态
- 无限循环群的同构群
- 有限循环群的同构群
- (循环)群的直积

循环群与生成元



- **定义（循环群）：**

设 $\langle G, * \rangle$ 为**循环群**（cyclic group）指：

$$(\exists a \in G)(G = \langle a \rangle)$$

这里， $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ， a 称为 G 之**生成元**
(generator)

循环群与生成元（续）



- **定义（有限循环群）**：若循环群 G 的生成元 a 的阶为 n ，则称 G 为有限循环群，即 n 阶循环群： $G = \{a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ ，其中 a^0 为幺
- **定义（无限循环群）**：若循环群 G 的生成元 a 为无限阶元，则称 G 为无限循环群： $G = \{a^0, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \dots\}$ ，其中 a^0 为幺

循环群与生成元（续）



- **例1：**无限循环群 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 是循环群，恰有2个生成元：1和-1

$\therefore n$ 为 \mathbb{Z} 之生成元 $\Leftrightarrow \mathbb{Z} = \langle n \rangle \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})n^k =$

$1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(k \cdot n = 1) \Leftrightarrow n \in \{1, -1\}$

\therefore 1和-1均是其生成元

循环群与生成元（续）



● 例2：有限循环群

模6剩余加群 $\langle \mathbb{Z}_6, \oplus_6 \rangle$ 是循环群，恰有2个生成元：1 和 5

$$5^0 = 0, \quad 5^1 = 5, \quad 5^2 = 4,$$

$$5^3 = 3, \quad 5^4 = 2, \quad 5^5 = 1.$$

循环群与生成元（续）



● 例3：非循环群

Klein四元群 $(V, *)$ 不是循环群，因为对任何

$x \in V$ ， $\langle x \rangle = \{e, x\}$ ：

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

无限循环群的生成元



● **命题：** 若 a 是无限循环群的生成元，则 a^{-1} 也是该无限循环群的生成元

➤ 设群 $G = \langle a \rangle = \{a^k \mid a \in G, k \in \mathbb{Z}\}$, $a^k = (a^{-1})^{-k}$, 令 $p = -k$, 则 $G = \{(a^{-1})^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$, 故 $G = \langle a^{-1} \rangle$

无限循环群的生成元（续）



● **命题：**无限循环群有且只有2个生成元

- ∴ 设群 $G = \langle a \rangle = \{a^k \mid a \in G, k \in \mathbb{Z}\}$, 若 b 亦为 G 的生成元, 则: $(\exists m, t \in \mathbb{Z})(a^m = b \wedge b^t = a)$, 故 $a = b^t = (a^m)^t = a^{mt}$, 由消去律, $a^{mt-1} = e$ ∴ a 是无限阶元 ∴ $mt - 1 = 0 \Rightarrow (m = t = 1) \vee (m = t = -1)$, 故有 $b = a$ 或者 $b = a^{-1}$

有限循环群的生成元



- **命题：** 设有限群 $G = \langle a \rangle$ ，且 $|a| = n$ ，则对任意不大于 n 的正整数 r ， **$G = \langle a^r \rangle \Leftrightarrow \gcd(n, r) = 1$**
 - “ \Leftarrow ”：设 $\gcd(n, r) = 1$ ，则 $(\exists u, v \in \mathbb{Z})(ur + vn = 1)$ ，因此 $a = a^{ur+vn} = (a^r)^u (a^n)^v = (a^r)^u$ 。故而 G 中任意元素 a^k 可表为 $(a^r)^{uk}$ ，故有 $G = \langle a^r \rangle$ ；
 - “ \Rightarrow ”：设 a^r 是 G 的生成元，令 $\gcd(n, r) = d$ 且 $r = dt$ ，则 $(a^n)^t = (a^n)^{r/d} = (a^r)^{n/d} = e$ ，故 $|a^r| \mid (n/d)$ ，但 $|a^r| = n$ 故 $n \mid \frac{n}{d} \Rightarrow d = 1$ ，故有 $\gcd(n, r) = 1$ 即 n 与 r 互质。

有限循环群的生成元（续）



- n 阶循环群 G 的生成元的个数恰好等于不大于 n 且与 n 互质的正整数的个数，即Euler函数 $\varphi(n)$ ，其生成元集为：

$$\{i \mid 0 < i \leq n \wedge \gcd(i, n) = 1\}$$

有限循环群的生成元（续）



例 (1) 设 $G = \{e, a, \dots, a^{11}\}$ 是 12 阶循环群, 则 $\varphi(12) = 4$. 小于或等于 12 且与 12 互素的数是 1, 5, 7, 11, 由定理 11.19 可知 a, a^5, a^7 和 a^{11} 是 G 的生成元.

(2) 设 $G = \langle \mathbb{Z}_9, \oplus \rangle$ 是模 9 的整数加群, 则 $\varphi(9) = 6$. 小于或等于 9 且与 9 互素的数是 1, 2, 4, 5, 7, 8. 根据定理 11.19, G 的生成元是 1, 2, 4, 5, 7 和 8.

(3) 设 $G = 3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, G 上的运算是普通加法. 那么 G 只有两个生成元: 3 和 -3.



循环群的子群

● **命题：** 设 $G = \langle a \rangle$ 为循环群

(1) G 的子群为循环群

(2) 若 $|a| = \infty$ ，则 G 的子群除 $\{e\}$ 外皆为无限循环群

证：

(1) 令 $(H, *) \leq (G, *)$, 从而 $H \subseteq \langle a \rangle$, 若 $H = \{e\}$ 自然成立

否则取 a^m 为 H 中最小正幂元. 下证 $H = \langle a^m \rangle$ 只需证 $H \subseteq \langle a^m \rangle$, 任取 $h \in H \subseteq \langle a \rangle$, 故 $h = a^n$.

令 $n = qm + r$, $0 \leq r < m$, 从而 $h = a^n = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r$, 从而 $a^r = h(a^m)^{-q} \in H$, 故由 m 的最小性得 $r = 0$, 从而 $h = (a^m)^q \in \langle a^m \rangle$, 因此 H 为循环群。

(2) 设 $H \leq G$, 由(1)得 $H = \langle a^m \rangle$, 若 $H \neq \{e\}$ 则 $m \neq 0$, 从而若 $|H|$ 有穷则 $|a^m|$ 有穷与 $|a|$ 无穷矛盾。

循环群的子群（续）



● **命题：**对 n 的每个因子 d ， n 阶循环群 G 中恰有一个 d 阶子群

● **证明：**

● 令 $H = \langle a^{n/d} \rangle$ ，显然 H 是 G 的 d 阶子群

● 若令 $H_1 = \langle a^m \rangle$ 亦为 d 阶子群，则 $(a^m)^d = a^{md} = e$ ，

故有 $n|md$ ，即 $\frac{n}{d}|m$ ，因此 $a^m = (a^{n/d})^k \in H$ ，即

$H_1 \subseteq H$ ，但 $H_1 \approx H$ ，故有 $H_1 = H$

循环群的子群（续）



$G=Z_{12}$ 是 12 阶循环群. 12 的正因子是 1,2,3,4,6 和 12, 因此 G 的子群是:

1 阶子群 $\langle 12 \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$

2 阶子群 $\langle 6 \rangle = \{0, 6\}$

3 阶子群 $\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$

4 阶子群 $\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$

6 阶子群 $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

12 阶子群 $\langle 1 \rangle = Z_{12}$

群同构与同构映射



- **定义（群同构）**：群 $\langle G_1, \circ \rangle$ 与 $\langle G_2, * \rangle$ 同构($G_1 \cong G_2$)当且仅当存在双射函数 $f: G_1 \rightarrow G_2$ ，满足：

$$\forall x, y \in G_1, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- **例：**

正实数乘群 $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ 和实数加群 $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ ，同构映射

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \ln x$$

群同构关系是等价关系



- **自反性：** 对任意群 $\langle G, \circ \rangle$, $G \cong G$
 - 此时同构映射为恒等映射 $f(x) = x$
- **对称性：** 对任意群 G_1, G_2 , 若 $G_1 \cong G_2$ 则 $G_2 \cong G_1$
 - 后者的同构映射为前者同构映射的逆函数
- **传递性：** 对任意群 G_1, G_2, G_3 , 若 $G_1 \cong G_2$ 且 $G_2 \cong G_3$ 则 $G_1 \cong G_3$
 - 同构映射的复合是同构映射



群同构与同构映射（续）

- 任意两个三阶群同构

$$1 \rightarrow a \quad 2 \rightarrow b \quad 3 \rightarrow c$$

\circ	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	$?$	a
c	c	a	b



群同构与同构映射（续）

- 2个不同构的四阶群

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

四元循环群

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Klein四元群

同态与同态映射



- **定义（群同态）**：群 $\langle G_1, \circ \rangle$ 与 $\langle G_2, * \rangle$ 同态($G_1 \sim G_2$)

当且仅当存在函数 $f: G_1 \rightarrow G_2$ ，满足：

$$\forall x, y \in G_1, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- 如果上述映射是满射，则称为**满同态**；如映射是单射，则称为**单同态**；若 $G_1 = G_2$ ，则称 φ 为**自同态**

同态与同态映射（续）



● 命题：设 f 为从群 $\langle G, * \rangle$ 到群 $\langle H, \circ \rangle$ 的同态，则

(1) $f(e_G) = e_H$;

(2) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}, \forall a \in G$

证明：(1) $\because f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G) f(e_G)$

$$\therefore f(e_G) = f(e_G) (f(e_G))^{-1} = e_H$$

(2) $\because f(a^{-1}) f(a) = f(a^{-1} a) = f(e_G) = e_H$

$$f(a) f(a^{-1}) = f(a a^{-1}) = f(e_G) = e_H$$

$$\therefore f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

同态与同态映射（续）



- **例：** 整数加系统 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 与模3剩余加系统 $\langle \mathbb{Z}_3, \oplus_3 \rangle$ 同态，同态映射为

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_3, f(3k + r) = r, k \in \mathbb{Z}$$

该态射亦为满同态

- **趣味问题：** 由 $1, 2, \dots, 1000$ 这一千个自然数按照任意的组合进行加减，能否得到1001？

同态与同态映射（续）



- **趣味问题：** 由 $1, 2, \dots, 1000$ 这一千个自然数按照任意的组合进行加减，能否得到1001？
- **定义系统（奇偶加群）：** $\langle \{e, o\}, * \rangle$ ，运算表如下：

*	e	o
e	e	o
o	o	e

则 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{e, o\}$

$$f(x) = \begin{cases} e & x \text{ 是偶数} \\ o & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

是从 $(\mathbb{Z}, +)$ 到 $(\{e, o\}, *)$ 的满同态映射

无限循环群的同构群



● **定理：** 设 $\langle G, * \rangle$ 为无限循环群，则 $\langle G, * \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, + \rangle$

● **证明：** $|a| = \infty$ ，令 $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ 如下： $f(n) = a^n$ ，

$\because f(n + m) = a^{n+m} = a^n * a^m = f(n) * f(m) \therefore f$ 为

同态；又 $\because f(n) = f(m) \Rightarrow a^n = a^m \Rightarrow a^{|n-m|} =$

$e \Rightarrow |n - m| = 0 \Rightarrow n = m \therefore f$ 为1-1，onto易见，从

而 $\langle G, * \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, + \rangle$

有限循环群的同构群



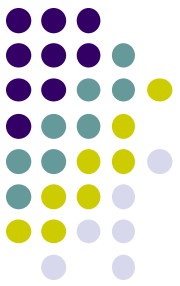
- **定理：** 设 $\langle G, * \rangle$ 为有限循环群，则 $\langle G, * \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n, \oplus_n \rangle$
- **证明：** $|a| = n > 0$ 从而 $G = \{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\}$ ，令 $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ 如下： $f(i) = a^i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ ，由于 $f(i \oplus_n j) = a^{i \oplus_n j} = a^i * a^j = f(i) * f(j)$ ，故 f 为同态。又由于 $f(i) = f(j) \Rightarrow a^i = a^j \Rightarrow a^{|i-j|} = e \Rightarrow n \mid |i-j| \Rightarrow i \equiv j \pmod{n} \Rightarrow i = j$ ，故 f 为单射， f 的满射性易见，因此 $\langle G, * \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n, \oplus_n \rangle$

循环群的同构群



-
- **定理：** 设 $\langle G, * \rangle$ 为无限循环群，则 $\langle G, * \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, + \rangle$
- **定理：** 设 $\langle G, * \rangle$ 为有限循环群，则 $\langle G, * \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n, \oplus_n \rangle$

推论： 循环群皆为阿贝尔群



群的直积

- 给定两个群: (S, \circ) , $(T, *)$, 定义笛卡儿乘积 $S \times T$ 上的运算 \otimes 如下:

$$\langle s_1, t_1 \rangle \otimes \langle s_2, t_2 \rangle = \langle s_1 \circ s_2, t_1 * t_2 \rangle$$

- $(S \times T, \otimes)$ 是群

- 结合律:
$$\begin{aligned} \langle (r_1 \circ s_1) \circ t_1, (r_2 * s_2) * t_2 \rangle \\ = \langle r_1 \circ (s_1 \circ t_1), r_2 * (s_2 * t_2) \rangle \end{aligned}$$

- 单位元素: $\langle 1_S, 1_T \rangle$

- 逆元素: $\langle s, t \rangle$ 的逆元素是 $\langle s^{-1}, t^{-1} \rangle$

- (其中: $s, s^{-1} \in S, t, t^{-1} \in T$)



循环群的直积

- $C_m \times C_n \cong C_{mn}$ iff m 与 n 互质。其中 C_k 表示 k 阶循环群。
- \Leftarrow 若 m 与 n 互质，只需证明 $C_m \times C_n$ 含有阶为 mn 的元素。
 - $(a,b)^{mn} = e$, 其中 a,b 分别是 C_m 和 C_n 的生成元素。
 - 若 $(a,b)^k = e$, k 必是 m,n 的公倍数，因 m 与 n 互质，故 k 是 mn 的倍数。所以， (a,b) 的阶是 mn 。
- \Rightarrow 若 $C_m \times C_n \cong C_{mn}$ ，则 $C_m \times C_n$ 是循环群，设其生成元是 (s,t) ，则 (s,t) 的阶是 mn ，若 $\gcd(m,n)=k>1$ ，则 $(s,t)^{mn/k} = e$ ，这与 (s,t) 的阶是 mn 矛盾。

注意： $s^m=e_1, t^n=e_2$,



欧拉函数(phi)

- 如果 m 与 n 互质, 则 $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(mn)$.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2}) \cdots \varphi(p_r^{k_r}) \\ &= p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_2^{k_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots p_r^{k_r} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).\end{aligned}$$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$



欧拉函数(phi)

- C_n 中元素按其阶分类, d 阶元素共有 $\varphi(d)$ 个, $d|n$.

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$

- (Euler定理) 若正整数 a 与 n 互质, 则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

小于 n 且与 n 互质的正整数及乘法(模 n)构成一个群