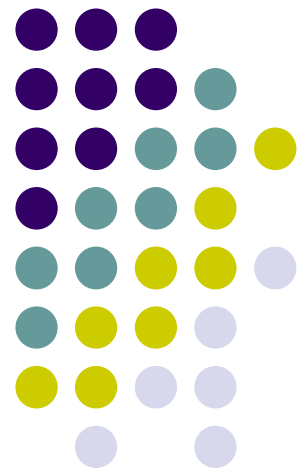


# 图的连通性

离散数学—图论初步

南京大学计算机科学与技术系





# 内容提要

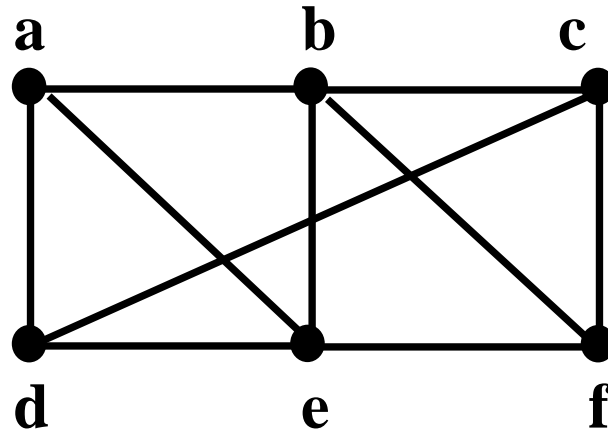
- 通路 & 回路
- 通路 & 同构
- 无向图的连通性
  - 连通度
  - 2-连通图
- 有向图的连通性
  - 无向图的定向



# 通路的定义

- 定义：图 $G$ 中从 $v_0$ 到 $v_n$ 的长度为 $n$ 的通路是 $G$ 的 $n$ 条边 $e_1, \dots, e_n$ 的序列，满足下列性质
  - 存在 $v_i \in V$  ( $0 < i < n$ ), 使得 $v_{i-1}$ 和 $v_i$ 是 $e_i$ 的两个端点 ( $1 \leq i \leq n$ )。
- 相关点
  - **回路**：起点与终点相同，长度大于0。
  - 不必区分多重边时，可以用相应顶点的序列表示通路。
  - 长度为0的通路由单个顶点组成。
  - **简单通路**：边不重复，即， $\forall i, j, i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$
  - **初级通路**：点不重复，亦称为“路径”

# 通路 (举例)



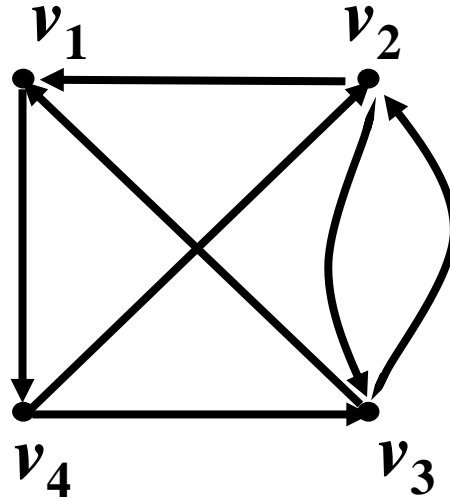
- 简单通路: a, d, c, f, e。 长度为4。
- 回路: **b, c, f, e, b**。 长度为4。
- 通路: **a, b, e, d, a, b**。 长度为5。
- 不是通路: **d, e, c, b**。



# 通路的定义（有向图）

- 定义：有向图 $G$ 中从 $v_0$ 到 $v_n$ 的长度为 $n$ 的通路是 $G$ 的 $n$ 条边 $e_1, \dots, e_n$ 的序列，满足下列性质
  - 存在 $v_i \in V$  ( $0 < i < n$ ), 使得 $v_{i-1}$ 和 $v_i$ 分别是 $e_i$ 的起点和终点 ( $1 \leq i \leq n$ )。
- 相关点
  - **回路**：起点与终点相同，长度大于0。
  - 不必区分多重边时，可以用相应顶点的序列表示通路。
  - 长度为0的通路由单个顶点组成。
  - **简单通路**：边不重复，即， $\forall i, j, i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$

# 通路 (举例)



- 简单通路:  $v_1, v_4, v_2, v_3$ 。 长度为3。
- 回路:  $v_2, v_1, v_4, v_2$ 。 长度为3。
- 通路:  $v_2, v_3, v_1, v_4, v_2, v_3$ 。 长度为5。

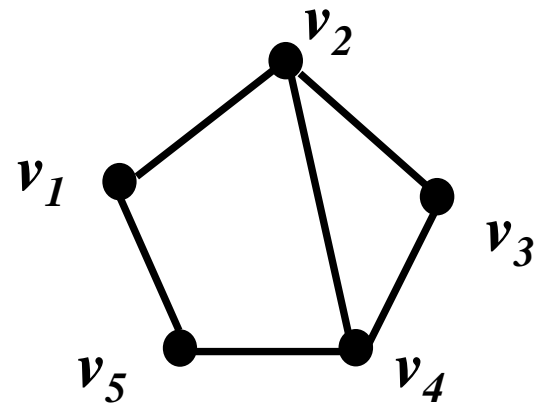
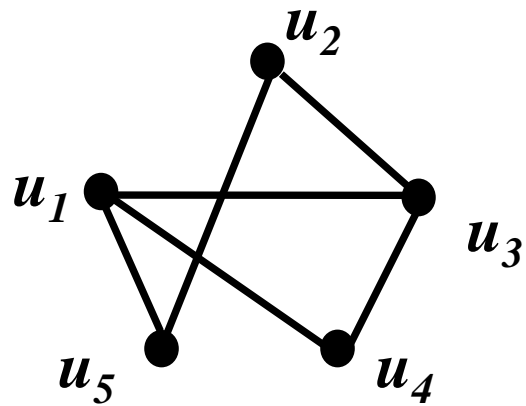
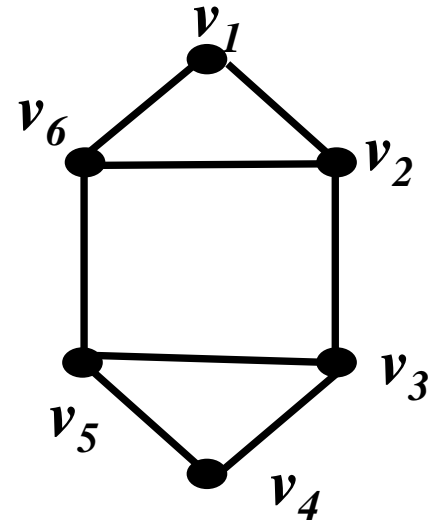
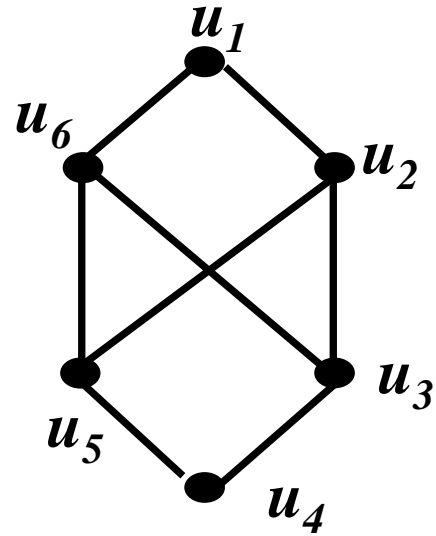


# 通路 与 同构

- 设图 $G$ 的邻接矩阵为 $A$ 
  - $(A^k)_{i,j}$ :  $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为 $k$ 的通路个数
  - $(A^k)_{i,i}$ :  $v_i$ 到 $v_i$ 的长度为 $k$ 的回路个数
- 同构图的不变量: 长度为 $k$ 的回路的存在性。

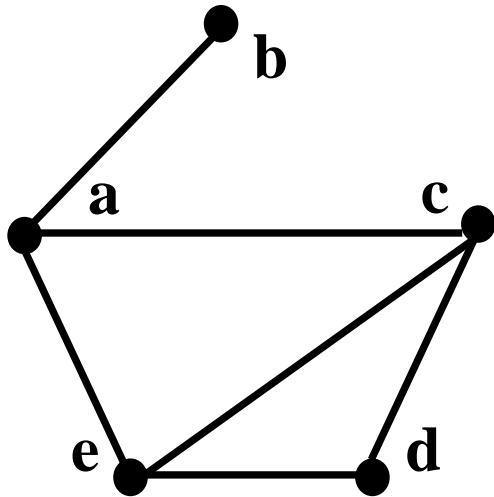


# 通路 与 同构

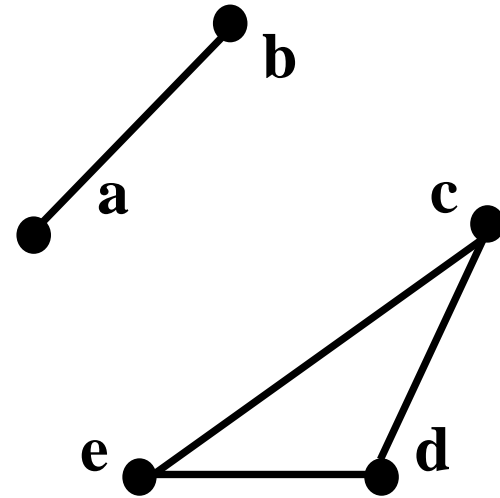


# 无向图的连通性

- 定义：无向图 $G$ 称为是连通的，如果 $G$ 中任意两个不同顶点之间都有通路。



$G_1$



$G_2$



# 连通分支

- 连通分支
  - 极大连通子图
- 每个无向图是若干个互不相交的连通分支的并。
  - “顶点之间存在通路”是一个等价关系，任一等价类上的导出子图即为一个连通分支。
- 若图 $G$ 中存在从 $u$ 到 $v$ 的通路，则一定有从 $u$ 到 $v$ 的简单通路。
  - 证明：最短通路必是简单的，事实上，它没有重复顶点。

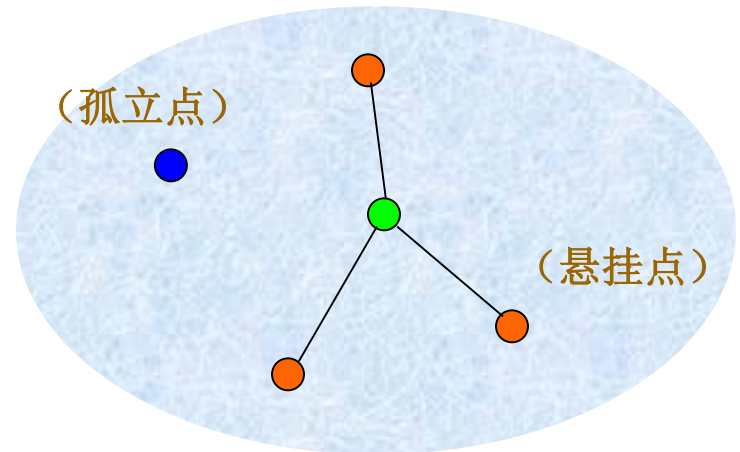
# 点的删除与连通分支数量的增减

- $p(G-v)$ (其中 $v$ 是 $G$ 中任意一个顶点)的情况比较复杂

(注意: 删除顶点意味着同时删除该点关联的边)

- 可能会.....

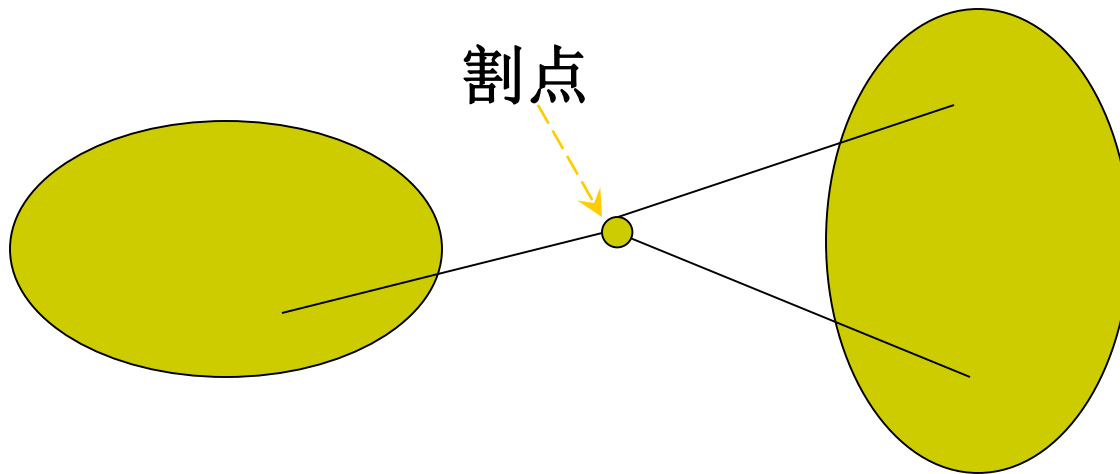
- 减少 (删除孤立点)
- 不变 (例如: 删除悬挂点)
- 增加很多个 (例如: star)





# 割点 (cut vertex, articulation vertex)

- 定义:  $G$ 是图,  $v \in V_G$ , 若 $p(G-v) > p(G)$ , 则称 $v$ 是**割点**



(注意: 只需考虑割点所在的连通分支, 以下讨论不妨只考虑连通图)



# 关于割点的三个等价命题

- 以下三个命题等价:

(1)  $v$ 是割点。

(2) 存在 $V-\{v\}$ 的分划 $\{V_1, V_2\}$ , 使 $\forall u \in V_1, w \in V_2, uw$ -通路均包含 $v$ 。

(3) 存在顶点 $u, w (u \neq v, w \neq v)$ , 使得任意的 $uw$ -通路均包含 $v$ 。

- 证明:

(1) $\Rightarrow$ (2):  $\because v$ 是割点,  $G-v$ 至少存在两个连通分支, 设其中一个的顶点集是 $V_1$ 。令 $V_2=V-(V_1 \cup \{v\})$ , 则 $\forall u \in V_1, w \in V_2, u, w$ 一定在 $G-v$ 的不同的连通分支中。 $\therefore$ 在 $G$ 中, 任何 $uw$ -通路必含 $v$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3): 注意: (3)是(2)的特例。

(3) $\Rightarrow$ (1): 显然, 在 $G-v$ 中已不可能还有 $uw$ -通路,  $\therefore G-v$ 不连通,  $\therefore v$ 是割点。



# 边的删除与连通分支数量的增加

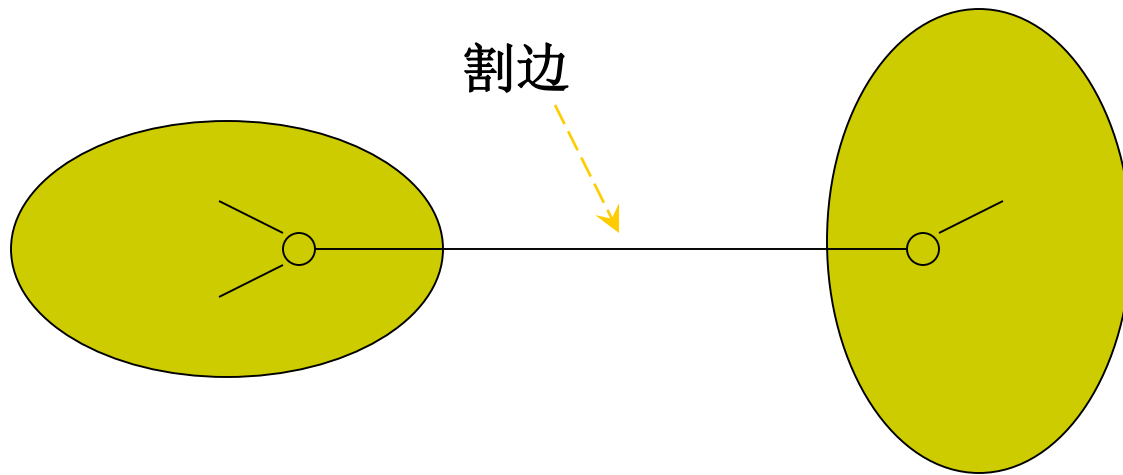
- 设 $p(G)$ 表示图 $G$ 中连通分支数，则：

$p(G) \leq p(G-e) \leq p(G)+1$ ，其中 $e$ 是 $G$ 中任意一条边

- 第一个“不大于”显然成立(删除 $e$ 只会影响 $e$ 所在的那一个连通分支)。
- 第二个“不大于”成立：注意在图中任意两点之间加一条边，最多只能将两个连通分支连成一个。

# 割边 (桥; cut edge, bridge)

- 定义: 设 $G$ 是图,  $e \in E_G$ , 若 $p(G-e) > p(G)$ , 则称 $e$ 是 $G$ 中的**割边**。



(注意: 只需考虑割边所在的连通分支, 以下讨论不妨只考虑连通图)



# 割边与回路

- $e$ 是割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任一简单回路上。(注意：割点没有相应结论)
  - 证明：
    - $\Rightarrow$ : 假设 $C$ 是包含 $e=xy$ 的初级回路, 令 $C-e=P$ ,  $P$ 是不含 $e$ 的 $xy$ -路径。对 $G$ 中任意顶点 $u,v$ , 若 $uv$ -通路中不含 $e$ , 则该通路也是 $G-e$ 中的 $uv$ -通路; 若 $uv$ -通路中含 $e$ , 则将所有的 $e$ 均替换为 $P$ , 得到 $G-e$ 中的 $uv$ -通路,  $\therefore G-e$ 仍连通, 与 $e$ 是割边矛盾。
    - $\Leftarrow$ : 假设 $e=xy$ 不是割边。则 $G-e$ 仍连通, 设 $P$ 是 $G-e$ 中的 $xy$ -路径,  $P$ 中不含 $e$ , 则:  $P+e$ 是 $G$ 中的简单回路, 矛盾。



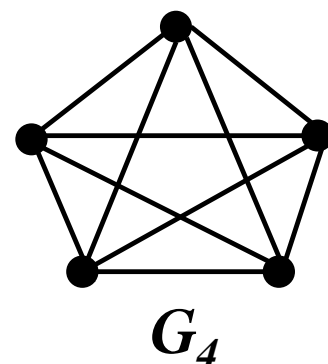
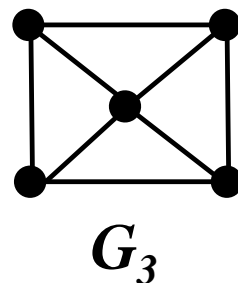
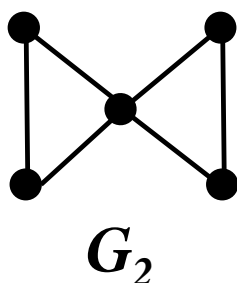
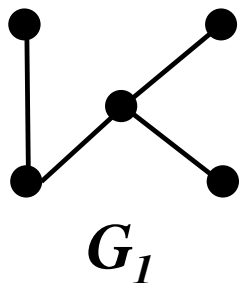
# 有关割边的四个等价命题

- 以下四个命题等价：
  - (1)  $e$ 是割边。
  - (2)  $e$ 不在 $G$ 的任一简单回路上。(注意：割点没有相应结论)
  - (3) 存在 $V$ 的分划 $\{V_1, V_2\}$ , 使得 $\forall u \in V_1, w \in V_2$ ,  $uw$ -通路均包含 $e$ 。
  - (4) 存在顶点 $u, w$ , 使得任意的 $uw$ -通路均包含 $e$ 。



# 连通图“连接的牢固度”不一样

- 图 $G_1$ 中删除任意一条边都不连通了。
- 图 $G_2$ 则至少删除两条边，或删除中间那个顶点，才不连通。
- 图 $G_3$ 删除任意一个点依然连通。
- 图 $G_4$ 至少要删除四条边才可能不连通，且不可能通过删除顶点使其不连通。





# 图的(点)连通度

(注意：若 $G$ 是顶点数不少于2的非完全图，删除足够数量的点一定能使图变成不连通图或者平凡图。)

- 定义：使非平凡连通图 $G$ 成为不连通图或者平凡图需要删除的最少顶点数称为图 $G$ 的(点)连通度，记为 $\kappa(G)$ 。

(注意：这不意味着任意删除 $\kappa(G)$ 个点就一定会使该图不连通)

- 约定：不连通图或平凡图的连通度为0，而 $\kappa(K_n)=n-1$

- 若图 $G$ 的连通度不小于 $k$ ，则称 $G$ 是 $k$ -连通图；

( $k$ -连通图，即  $\kappa(G) \geq k$ ：删除少于 $k$ 个顶点，它依然连通。)

( $\kappa(G) = k$ ：  $k$ -连通图，且有 $k$ 个顶点，删除它们就不连通。)



# 图的边连通度

(注意：若 $G$ 是顶点数不少于2的连通图，删除足够数量的边使得图变成不连通。)

- 类似地，使非平凡连通图 $G$ 变成**不连通**需要删除的**最少**边数称为图 $G$ 的**边连通度**。记为 $\lambda(G)$ 。(注意：这不意味着任意删除 $\lambda(G)$ 条边就一定会使该图不连通)

约定：不连通图或平凡图的边连通度为0。 $\lambda(K_n)=n-1$

若图 $G$ 的边连通度**不小于** $k$ ，则称 $G$ 是 **$k$ -边连通图**。

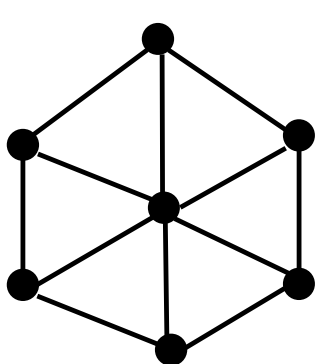
( $k$ -边连通图，即  $\lambda(G) \geq k$ ：删除少于 $k$ 条边，它依然连通。)

( $\lambda(G) = k$ ：  $k$ -边连通图，且有 $k$ 条边，删除它们就不连通。)

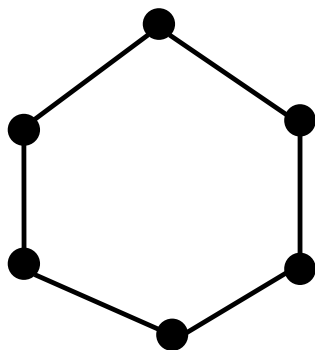
# 关于连通度的例子

- $W_6$ (轮):  $\kappa=\lambda=3=\delta$
- $C_6$ (圈):  $\kappa=\lambda=2=\delta$
- $K_{2,3}$ (完全二部图):  $\kappa=\lambda=2=\delta$
- $G$ :  $\kappa=1, \lambda=2, \delta=3$

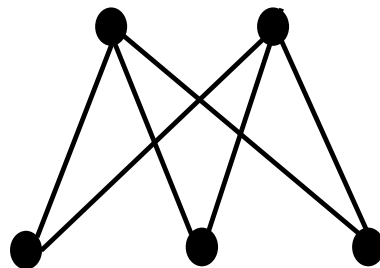
$\delta$ 表示图中最小顶点度



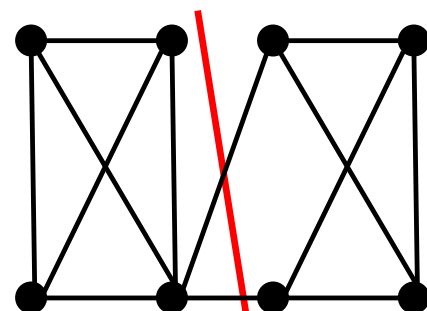
$W_6$



$C_6$



$K_{2,3}$

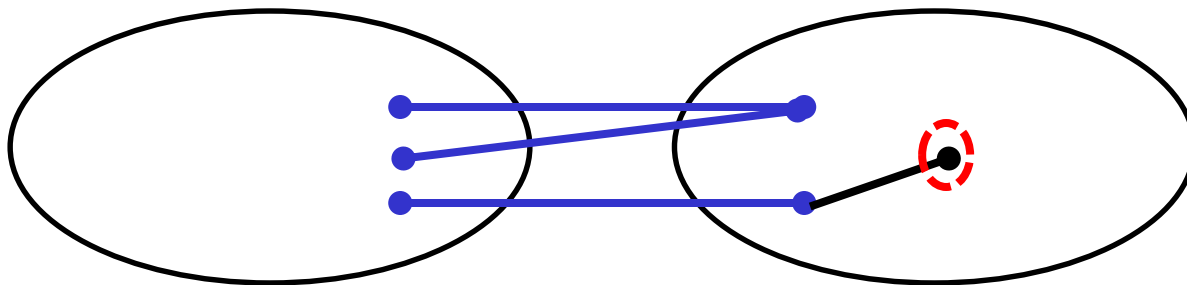


$G$



# 连通度的上限（续）

- 若图G是非平凡的, 则  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$
- 易证  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。设F为E的极小子集使得G-F不连通, 只需证明  $\kappa(G) \leq |F|$ 。
- 若G中存在不与F中的边相关联的点, 设为v。令C为G-F中v所在的连通分支。F中的任一边, 其两个端点不会都在C中 (F的极小性)。C中与F中边相关联的顶点 (集合) 分隔v与G-C,  $\kappa(G) \leq |F|$ 。

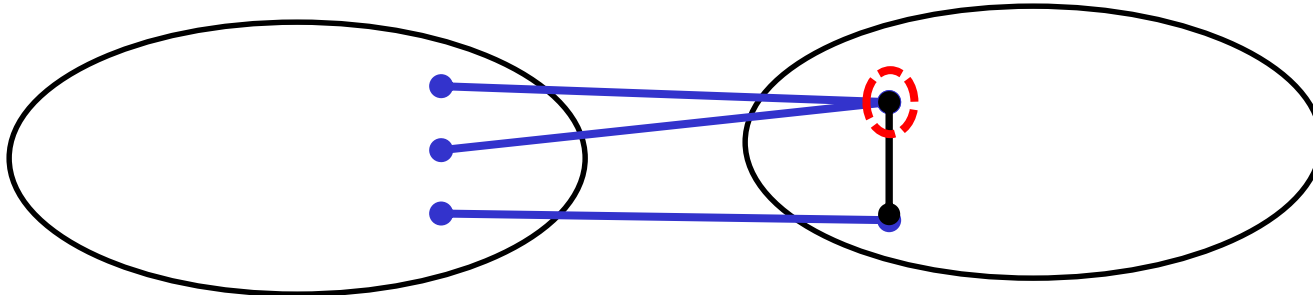
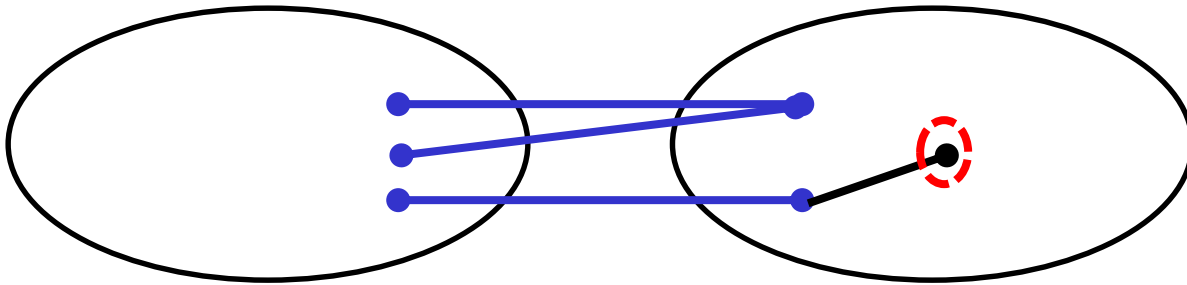




## 连通度的上限（续）

- 若 $G$ 中的各顶点均和 $F$ 中的某条边关联。对任意顶点 $v$ ,令 $C$ 是 $G-F$ 中包含 $v$ 的连通分支。考虑 $v$ 的任一邻居 $w$ 。若 $w$ 在 $C$ 中,则 $w$ 必定和 $F$ 中的某条边关联;若 $w$ 在 $G-C$ 中,则边 $vw$ 属于 $F$ 。因此,  $|N(v)| \leq |F|$ , 即 $d_G(v) \leq |F|$ 。
- 若 $V-N(v)-v \neq \Phi$ , 则删除 $N(v)$ 后,  $v$ 和 $V-N(v)-v$ 不连通,从而 $\kappa(G) \leq |F|$ 。
- 若 $V-N(v)-v = \Phi$ , 则取其它节点以满足1) 的条件。若所有节点均有 $V-N(u)-u = \Phi$ , 则图 $G$ 为完全图, 有 $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$ 。

# 连通度的上限 (续)

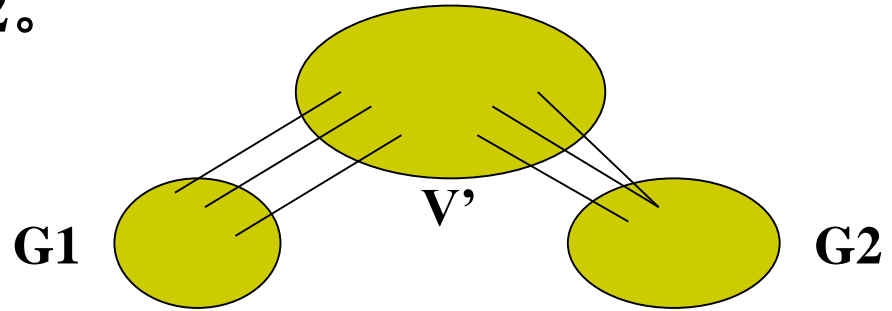


$$d_G(v) \leq |F|$$



# 达到连通度上限的图

- 设 $G$ 是简单图,  $|G|=n \geq 3$ , 且 $\delta_G \geq n-2$ , 则 $\kappa(G) = \delta_G$   
(注意: 任一点最多与一个点不相邻, 此时 $\lambda(G)$ 也必为 $\delta_G$ )
- 证明: 设 $V' \subseteq V_G$ , 使得 $G-V'$ 含两个连通分支 $G_1, G_2$ , 不妨设 $|G_1| \leq |G_2|$ , 则 $|G_1| \leq (n-|V'|)/2$ .



- $|G_1| \cdot \delta_G \leq \sum_{v \in G_1} d(v) \leq |G_1| \cdot (|G_1| - 1) + |G_1| \cdot |V'|$
- $\delta_G \leq |G_1| - 1 + |V'| \leq (n-|V'|)/2 + |V'| - 1$
- $2\delta_G \leq n-2 + |V'| \leq \delta_G + |V'|$ , 所以  $|V'| \geq \delta_G$
- 所以  $\kappa(G) \geq \delta_G$



# 连通度与点不相交的通路

(现象：对图 $G$ 中任意两点 $u, v$ ，如果点不相交的 $uv$ -通路有 $k$ 条，显然，要使 $u, v$ 不连通，至少须删除 $k$ 个顶点。)

- **Whitney定理：**

图 $G(|G| \geq 3)$ 是2-连通图 **当且仅当**  $G$ 中任意两点被至少2条除端点外顶点不相交的路径所连接。

注意：“ $G$ 中任意两点被至少2条除端点外顶点不相交的路径所连接”等价于“任意两点均处在同一初级回路中”。

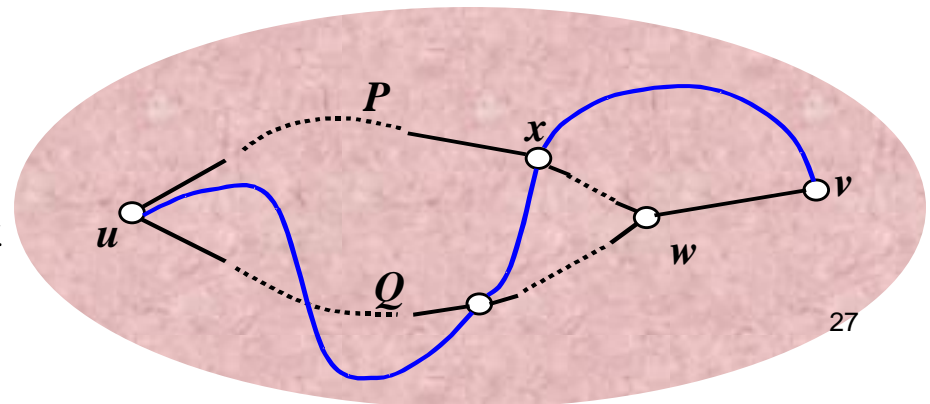
# Whitney定理的证明

- $\Leftarrow$ 显然
- $\Rightarrow$ : 设 $u, v$ 是图 $G$ 中的任意两点。下面对距离 $d(u, v)$ 进行归纳。  
当 $d(u, v)=1, uv \in E_G$ , 因为 $G$ 是2-连通图,  $G-uv$ 仍连通, 则 $G$ 中除边 $uv$ 外, 必有另一条不含 $uv$ 的路径。

假设当 $d(u, v) < k$ 时, 至少存在两条中间点不相交的通路。

若 $d(u, v) = k$ , 设 $u, v$ 间的一条最短路径是 $u \dots wv$ ,  $w$ 是与 $v$ 相邻的顶点。则 $d(u, w) < k$ , 由归纳假设 $u, w$ 之间存在两条中间点不相交的路径, 设为 $P, Q$ 。因为 $G$ 是2-连通图,  $G-w$ 中仍有(不含 $w$ 的) $uv$ -路径 $P'$ , 且它一定与 $P, Q$ 有公共点( $u$ 就是一个)。

假设这样的公共点中距离 $v$ 最近的是 $x$ (不妨假设它在 $P$ 上), 则 $Q+wx$ 边以及 $P$ 上的 $ux$ -段+ $P'$ 上的 $xv$ -段是 $u, v$ 之间两条中间点不相交的通路。





# 连通性的一般性质

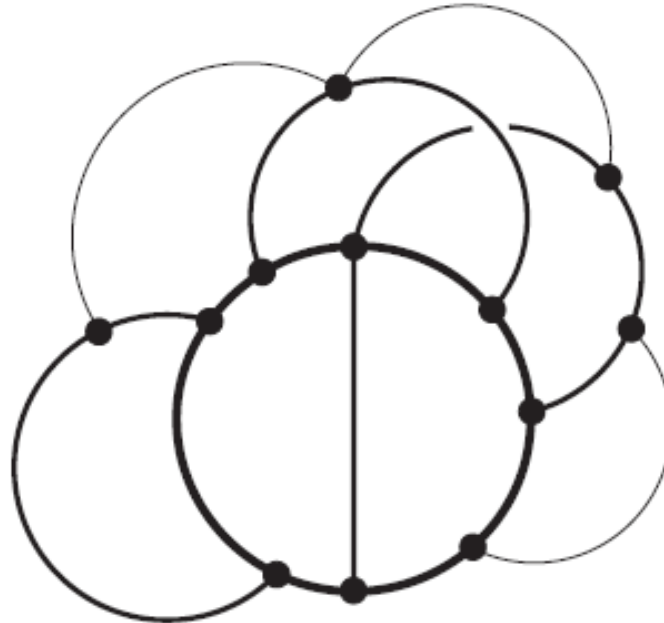
- **Menger定理（Whitney定理的推广）**
  - 图 $G$ 是 $k$ -连通图 当且仅当  $G$ 中任意两点被至少 $k$ 条除端点外顶点不相交的路径所连接。
  - 图 $G$ 是 $k$ -边连通图 当且仅当  $G$ 中任意两点被至少 $k$ 条边不相交的路径所连接。

## 2-连通图

- 命题. 一个图是2-连通的  $\Leftrightarrow$

它是一个回路(cycle), 或者可在已有的2-连通图上依次增加 **H-path** 而得.

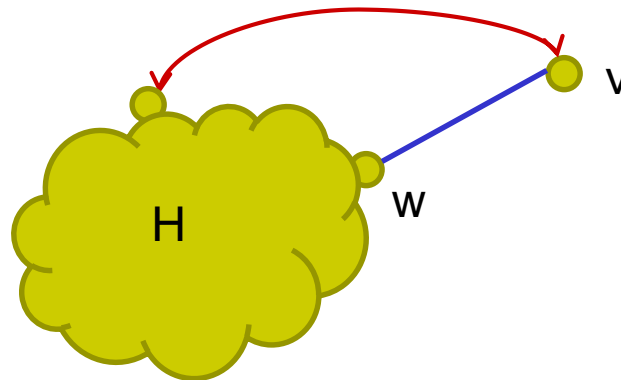
该通路有两个端点,  
且仅仅这两个端点  
在原图上。



## 2-连通图

- 证明. 充分条件显然成立. 下证必要条件.

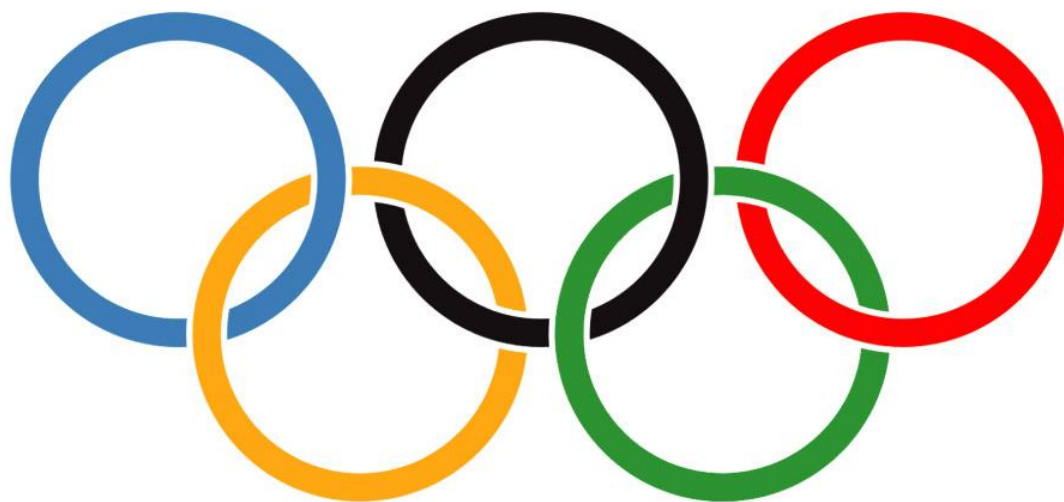
设 $G$ 是2-连通的.  $G$ 必包含回路 $C$ , 设 $H$ 是包含 $C$ , 依次增加 $H$ -Path得到的极大子图.  $H$ 必是 $G$ 的导出子图. 倘若 $H \neq G$ , 则存在 $v \in G-H$ ,  $w \in H$ ,  $vw \in G$ .  $G$ 是2-连通的,  $G-w$ 连通,  $v$ 到 $H$ 有路径 $P$ ,  $wvP$ 是 $H$ -Path, 矛盾.



# 2-连通图



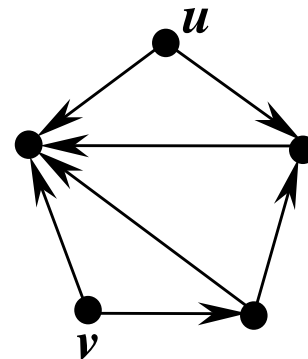
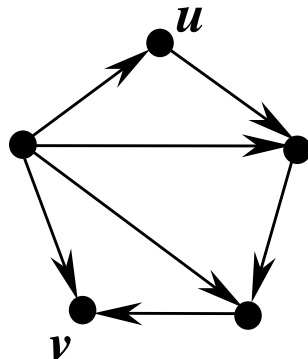
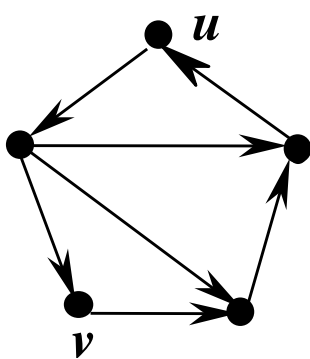
昵图网 nopic.com/whfpt





# 有向图的连通性

- 若将有向图 $D$ 各边的方向去掉，所得的无向图(称为 $D$ 的**底图**)连通，则 $D$ 称为**弱连通**有向图。(见下右图：既无 $uv$ -，又无 $vu$ -有向通路)
- $\forall u, v \in V_D$ , *存在一条*  $(u, v)$ -有向通路或者 $(v, u)$ -有向通路，则 $D$ 称为**单连通**有向图。(见下中图：有 $uv$ -，但无 $vu$ -有向通路)
- $\forall u, v \in V_D$ , *均存在*  $(u, v)$ -有向通路和 $(v, u)$ -有向通路，则 $D$ 称为**强连通**有向图。(见下左图)





# 强连通的充分必要条件

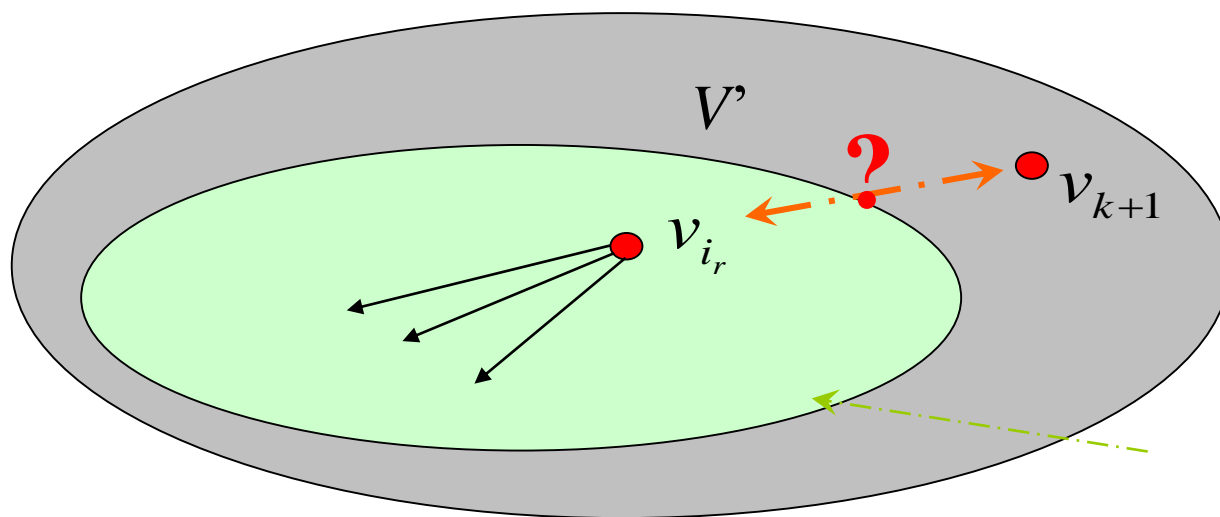
- 有向图 $D$ 是强连通的**当且仅当** $D$ 中的所有顶点在同一个有向回路上。
  - 证明:
    - ⇐ 显然
    - ⇒ 设 $V_D = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 令 $\Gamma_i$ 是 $v_i$ 到 $v_{i+1}$ 的有向通路( $i=1, \dots, n-1$ ), 令 $\Gamma_n$ 是 $v_n$ 到 $v_1$ 的有向通路, 则 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ 依次连接是包含 $D$ 中一切顶点的回路。

# 单向连通图中处处可达的顶点

- 若有向图 $D$ 是单向连通, 则 $\forall$ 非空集 $V' \subseteq V_D$ ,  $\exists v' \in V'$ , 使得 $v'$ 可达 $V'$ 中的所有顶点(规定顶点到其自身是可达的)。

注意: 当 $V'$ 足够小, 上述条件一定成立。

- 证明: (注意: 按照非空子集的大小进行归纳证明)





# 单向连通的充分必要条件

- 有向图 $D$ 是单向连通的**当且仅当** $D$ 中的所有顶点在同一个有向通路上。

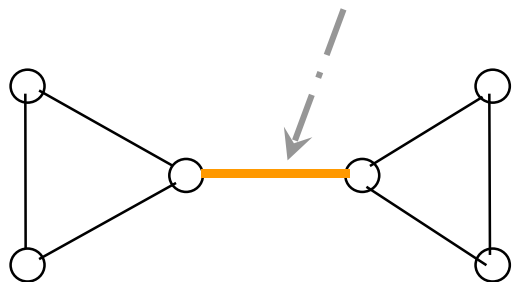
充分性显然，下面证明必要性

- 设 $V_D = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令 $V_1 = V_D$ ，则 $V_1$ 中存在可达所有顶点的顶点，不妨假设它就是 $v_1$ ，令 $V_{i+1} = V_i - \{v_i\}$ ，其中 $i=1, 2, \dots, n-1$ ；而且诸 $V_i$ 中均有可达该子集中所有顶点的顶点(不妨假设其就是 $v_i$ )，于是：将诸 $v_i v_{i+1}$ -通路连接起来即包含 $D$ 中所有顶点的有向通路。

# 无向图的边定向

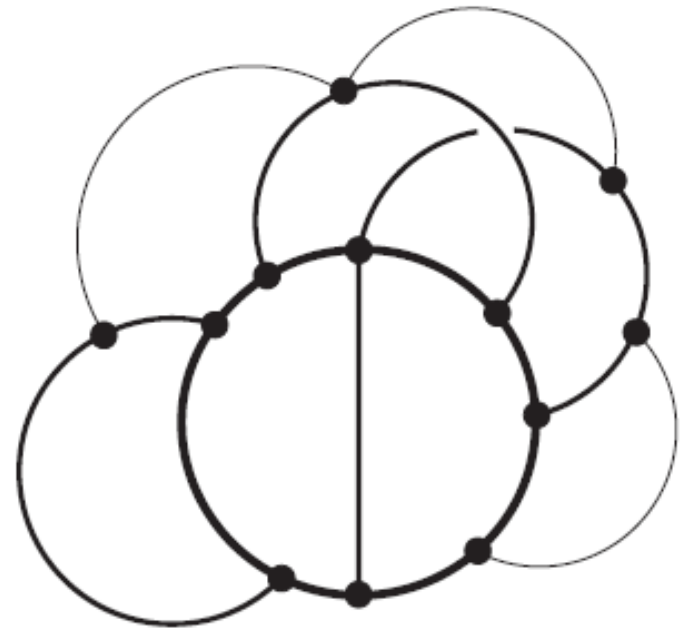
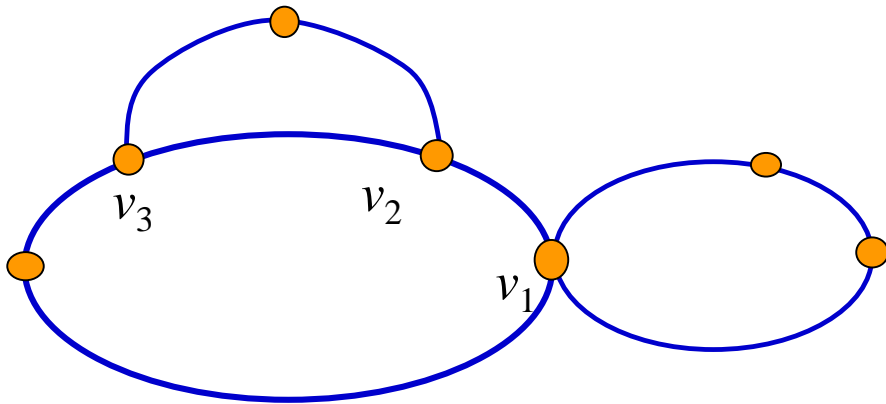
问题：何种道路网可以用规定**单行道**的办法来改善交通？

- 在图模型中，该问题表述为：什么样的无向图 $G$ 可通过边定向成**强连通**有向图。
  - 显然 $G$ 中不能有割边，否则定向后，割边端点之间不能双向可达。



因此， $G$ 的“2-边连通”是个**必要**条件，但它是否也是**充分**条件呢？

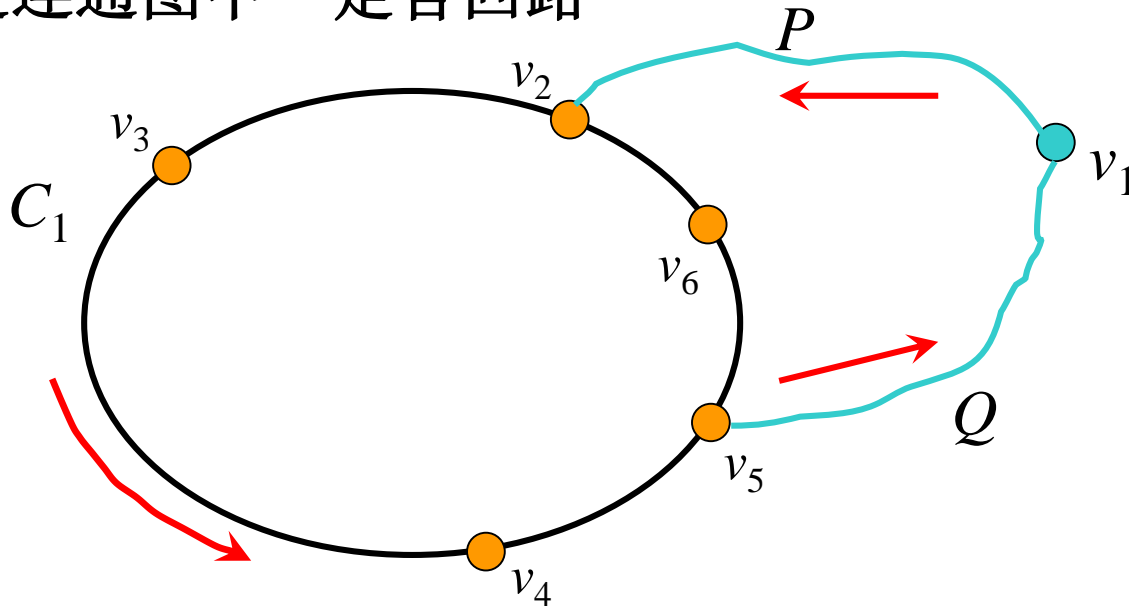
# 2-边连通与2-连通 (无向图)





# 2-边连通无向图的边定向

2-边连通图中一定含回路



构造有向通路  $C_2 = C_1 + QP, \dots$ , 总会得到包括图中所有点的**强连通**有向图。仍未包括的边可以任意定向。

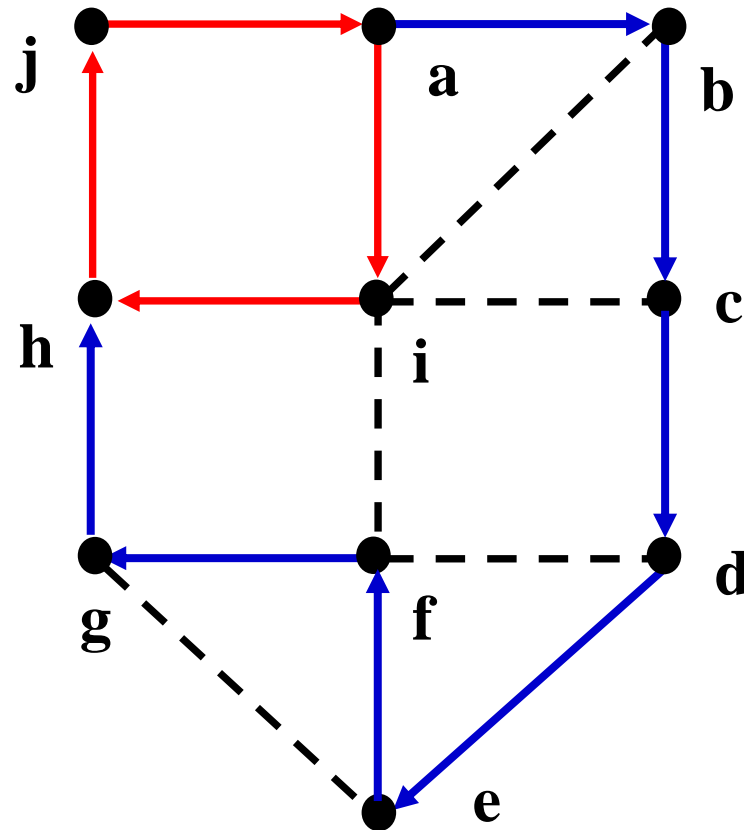


# 无向图边定向算法

- 输入：无环2-边连通无向图 $G$ （设 $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ）
- 输出：以 $G$ 为底图的强连通有向图
- 过程：
  - (1) 令 $V_1 = \{v_1\}$ ,  $i=1$ 。
  - (2) 若 $V_i = V_G$ , 对未定向边任意定向, 算法结束。否则转3。
  - (3) 取边 $v_{i_0} v_{i_1}$ , 使得 $v_{i_0} \in V_i, v_{i_1} \in V_G - V_i$  (一定可取到所要的边)。  
从 $v_{i_0} v_{i_1}$ 开始找一条初级通路或回路, 满足始点和终点在 $V_i$ 中, 而中间点均在 $V_G - V_i$ 中, 加方向使之成为有向通路。
  - (4)  $V_{i+1} = V_i \cup \{\text{上述通路或回路中所有中间点}\}$ , 转2。

# 无向图边定向算法(续)

- 示例



# 作业

- 见课程网站



# 参考文献



Reinhard Diestel. Graph Theory. Springer, Heidelberg, 2005

Section 1.3 and section 3.1



# 连通度的应用

- 问题: 将 $n$ 个计算机连成一个通信网络以共享资源, 如果要以最小的代价保证在故障节点少于 $k$ 个的条件下所有计算机能保持互连, 网络应该如何连接?
- 数学模型: 找出 $n$ 个结点的完全图的一个边最少的 $k$ -连通子图。

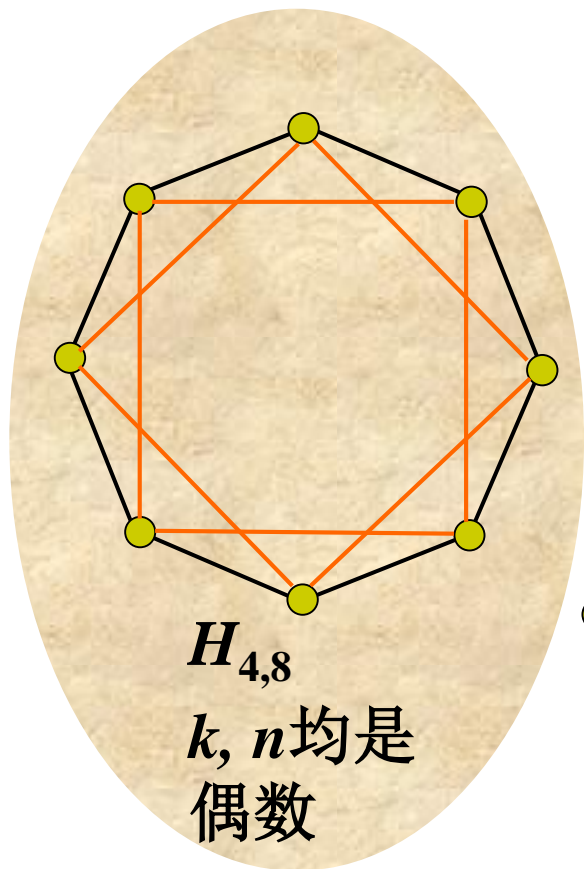
(注意: 含 $n$ 个顶点的 $k$ -连通图至少有 $nk/2$ 条边, 因为该图中最小顶点度不能小于 $k$ )

这个问题的一般形式:

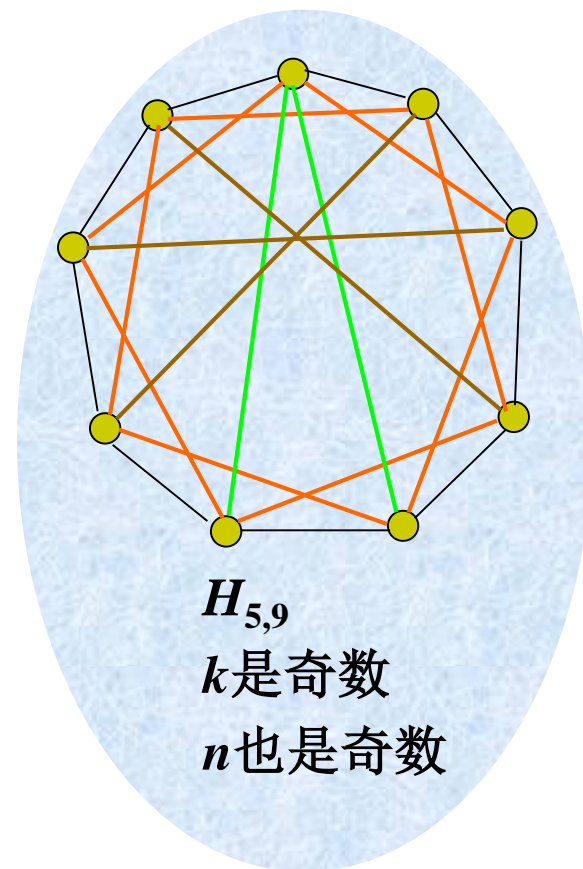
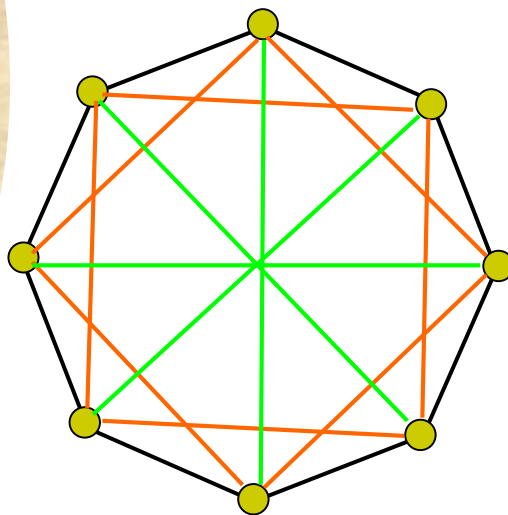
“若 $G$ 是带权图, 对给定的正整数 $k$ , 确定 $G$ 的最小 $k$ -连通生成子图”

被认为是一个NP-完全问题。

# Harary的解: $H_{k,n}$

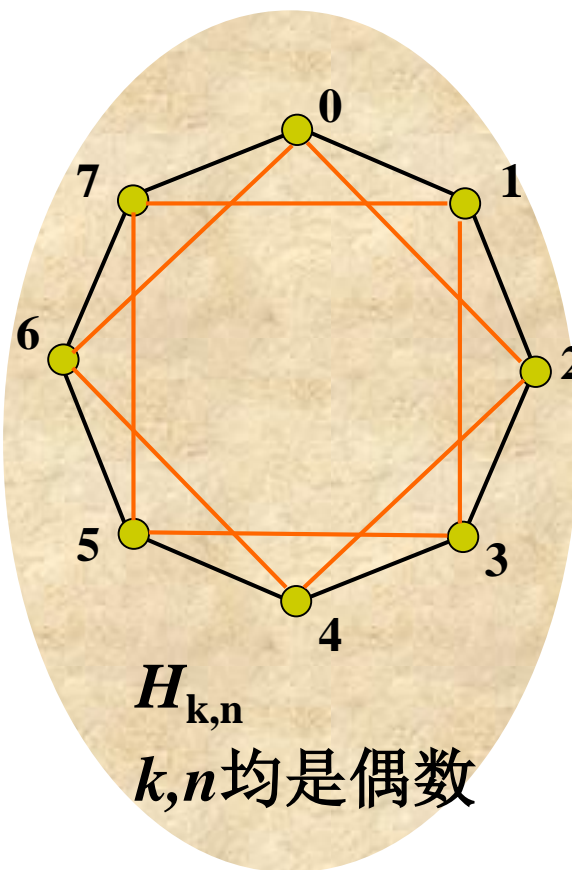


$H_{5,8}$   
 $k$ 是奇数  
 $n$ 是偶数



# 证明的思路

以这一较简单的情况为例



1. 前已说明：含  $n$  个顶点的  $k$ -连通图至少有  $nk/2$  条边
2. 左边的解恰好是  $nk/2$  条边
3. 因此，只须证明，这图是  $k$ -连通的。

不失一般性，假设  $|S \cap V'| < r$ ；则有：

要么  $v_i$  与  $v_j$  直接相邻；要么存在  $v_{i1}$  在  $v_i$  与  $v_j$  之间使得  $v_i$  与  $v_{i1}$  直接相邻；接下来以同样方式考虑  $v_{i1}$  与  $v_j$  之间的连通性；直至找到  $v_i, v_{i1}, \dots, v_{it}, v_j$  通路

相连：

就不连起了，删除后，图仍保持  $k$ -连通性。图

考虑两个子集合(这里的序是模  $n$  的)：

$S = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ ;  $T = \{j, j+1, \dots, i-1, i\}$ 。由于  $V'$  中元素个数小于  $2r$ ，这两集合中至少有一个含  $V'$  中的元素少于  $r$  个，则此集合中删除  $V'$  后仍构成一  $ij$ -通路，矛盾。