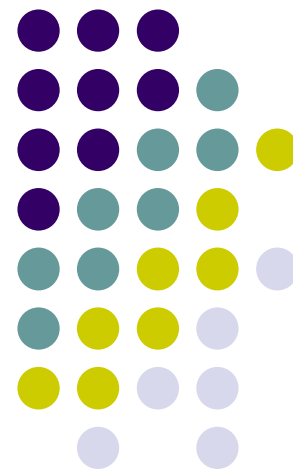


# 最短通路问题

离散数学—图论初步

南京大学计算机科学与技术系





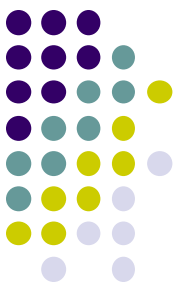
# 内容提要

- 引言
- **Dijkstra**算法
- 旅行商问题 (**TSP**)



# 带权图与最短通路问题

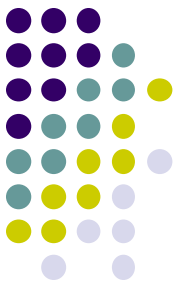
- **带权图**：三元组  $(V, E, W)$ ， $(V, E)$ 是图， $W$ 是从 $E$ 到非负实数集的一个函数。 $W(e)$ 表示边 $e$ 的权。
- 一条通路上所有边的权的和称为该通路的长度。
- 两点之间长度**最小**的通路称为两点之间的最短通路，不一定是唯一的。
- **单源点最短路问题**  
给定带权图  $G(V, E, W)$ 并指定一个源点，确定该源点到图中其它任一顶点的最短路（长度和路径）。



# Dijkstra最短路径的算法思想(1959)

- 源点s到顶点v的最短路径若为s...uv，则s...u是s到u的最短路径。
- (n-1)条最短路径按照其长度的非减次序求得，设它们的相应端点分别为 $u_1, \dots, u_{n-1}$ ，最短路径长度记为 $d(s, u_i)$ ， $i=1, \dots, n-1$ 。
- 假设前i条最短路径已知，第(i+1)条最短路径长度：

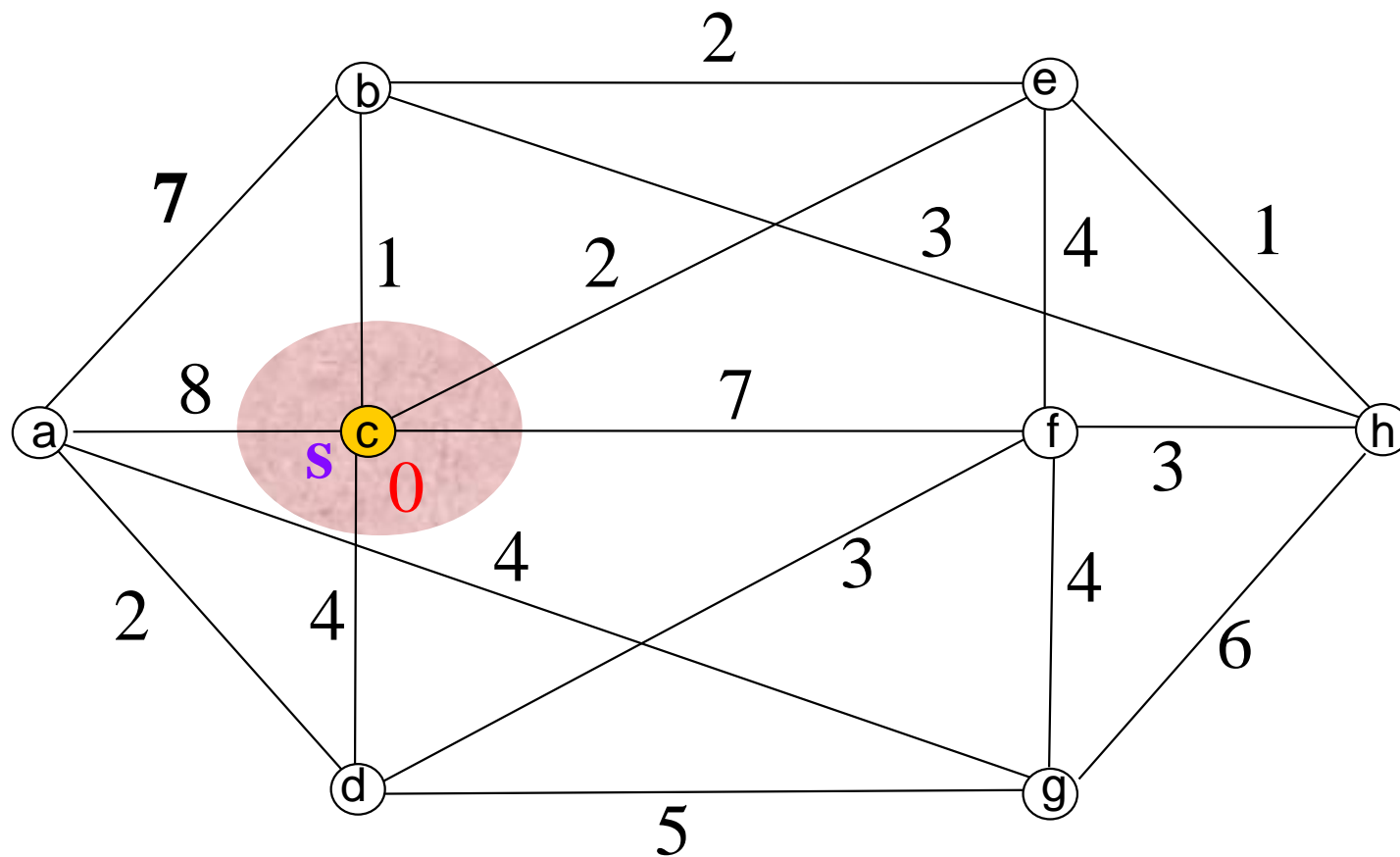
$$d(s, u_{i+1}) = \min\{d(s, u_j) + W(u_j, u_{i+1}) \mid j=1, \dots, i\}$$



# 求最短路径的Dijkstra算法

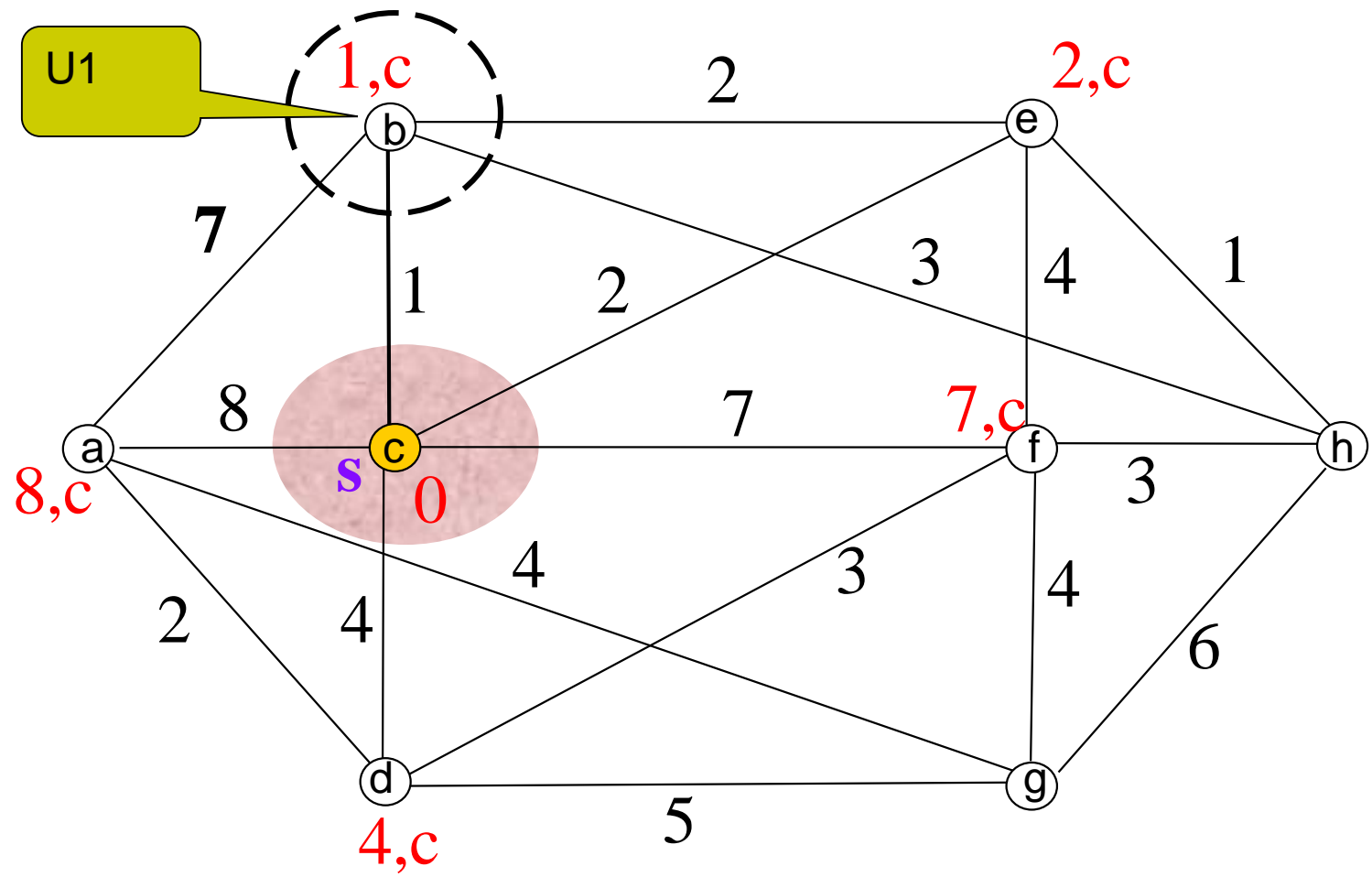
- 输入：连通带权图 $G$ ， $|V_G|=n$ ，指定顶点 $s \in V_G$
- 输出：每个顶点 $v$ 的标注 $(L(v), u)$ ，其中：
  - $L(v)$ 即从 $s$ 到 $v$ 的最短路径长度（目前可得的）
  - $u$ 是该路径上 $v$ 前一个顶点。

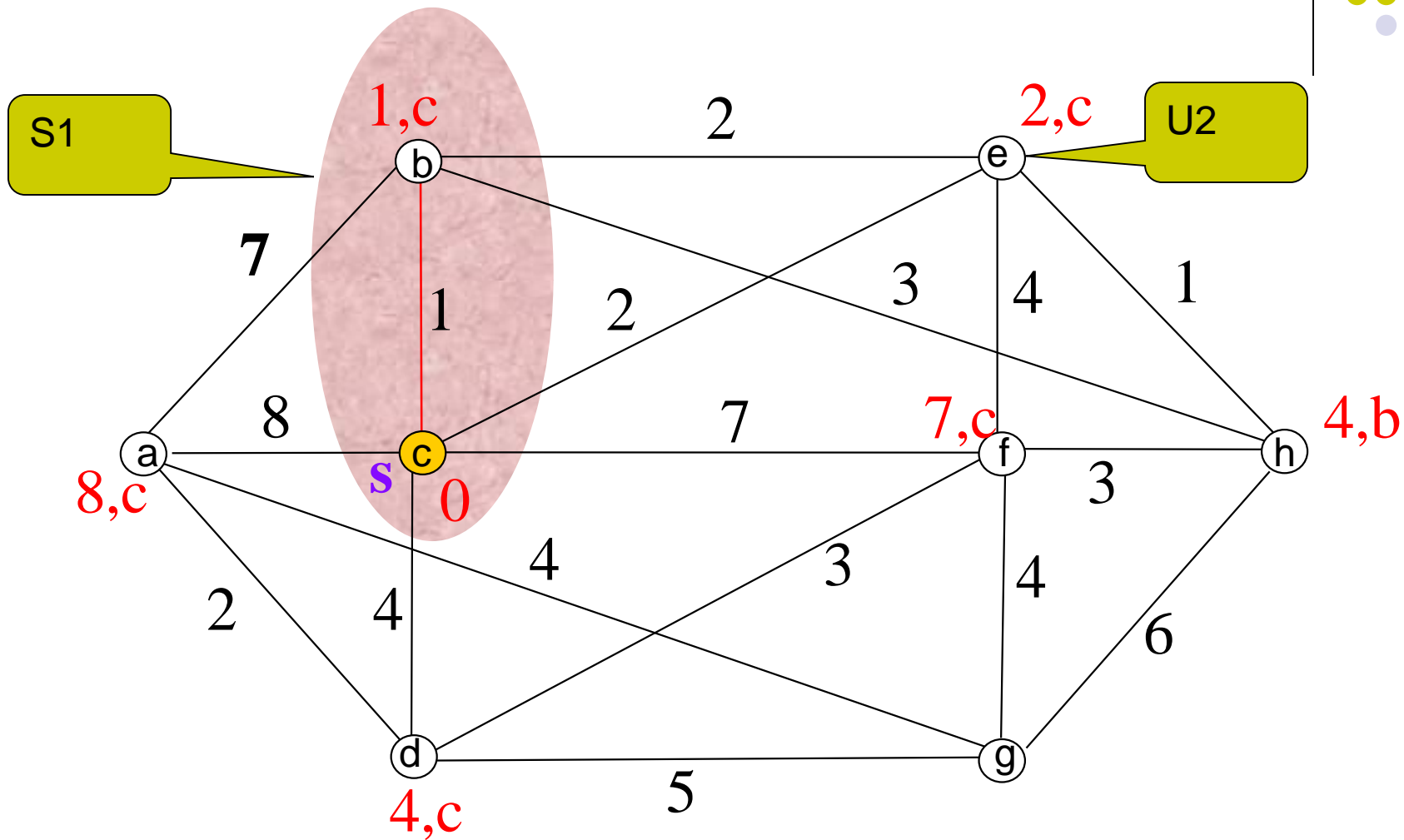
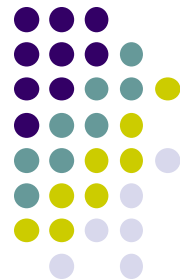
# 求最短路的一个例子

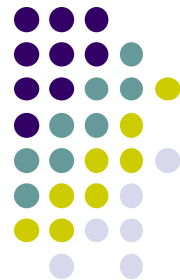




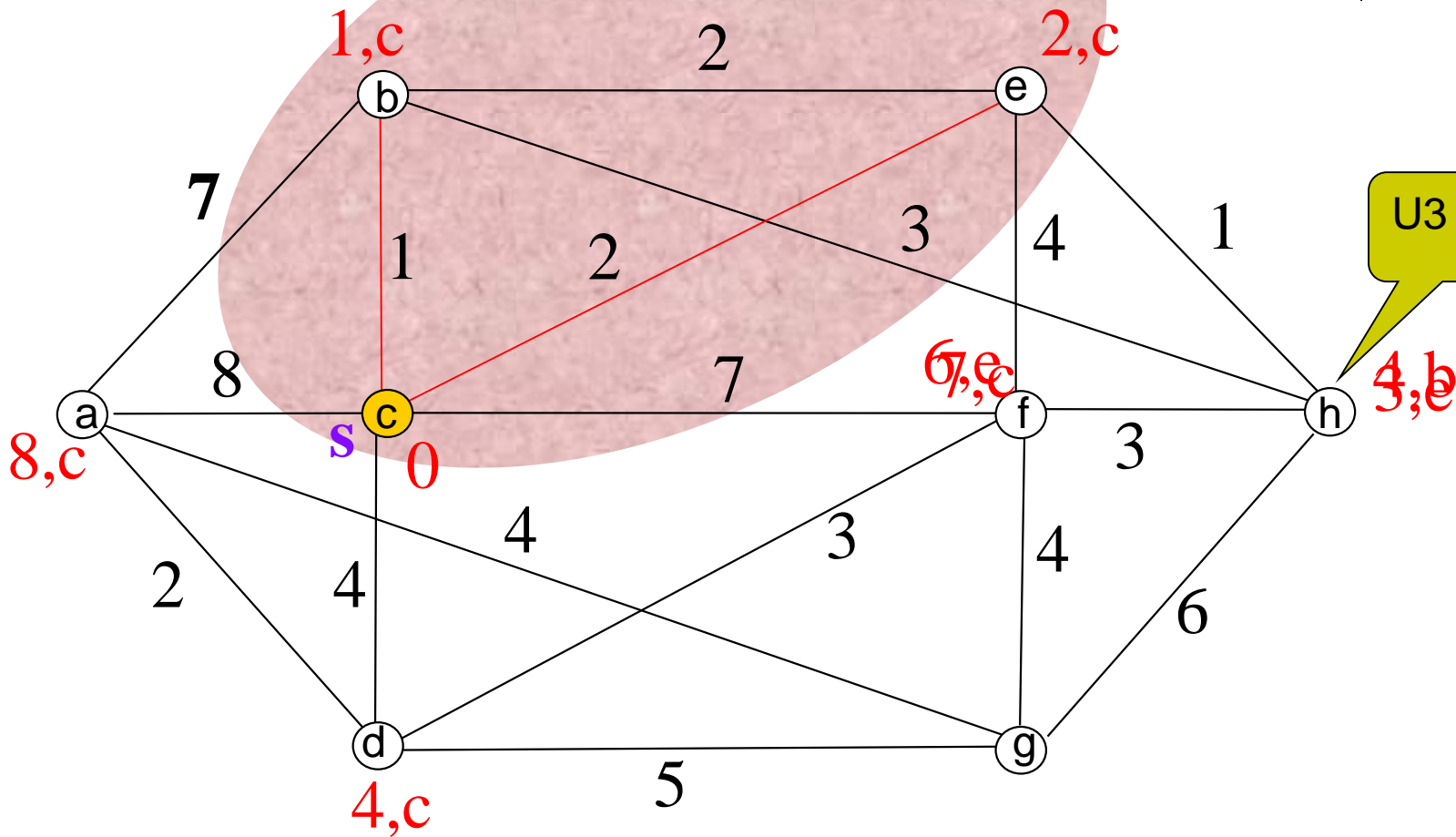
# 求最短路的一个例子

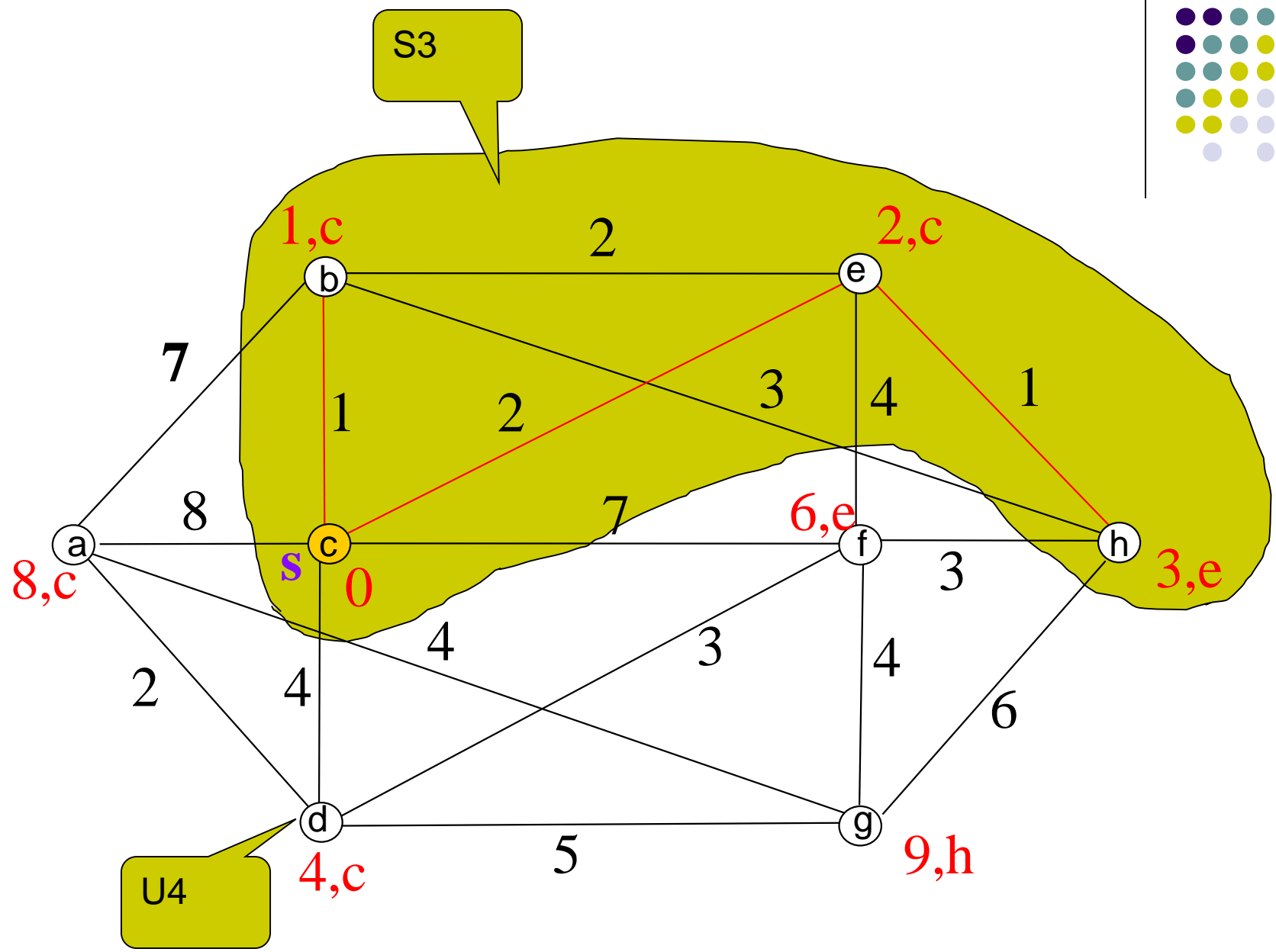
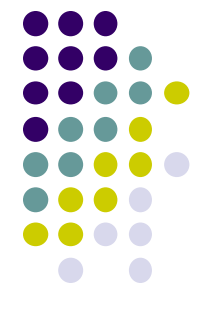


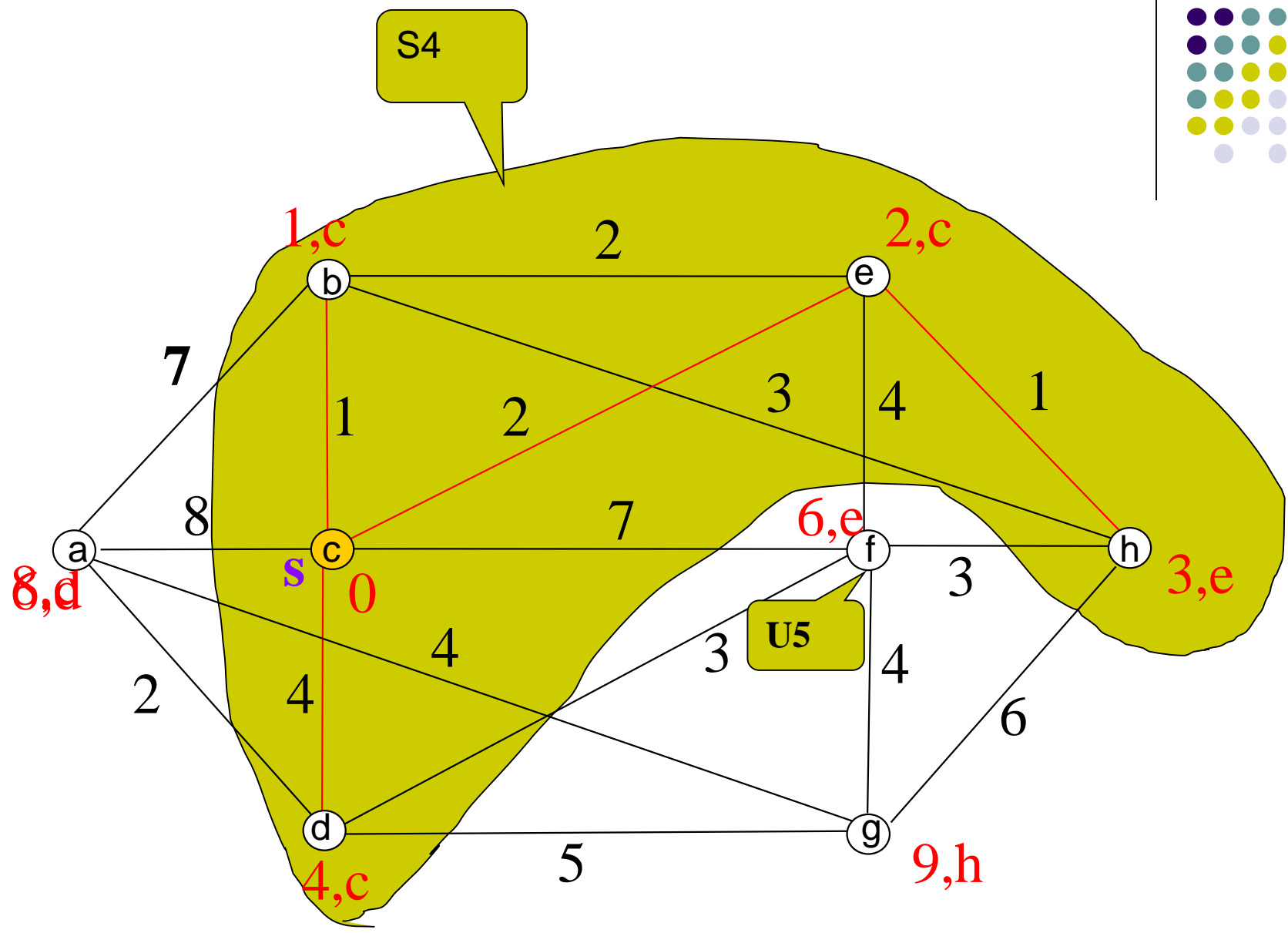




S2



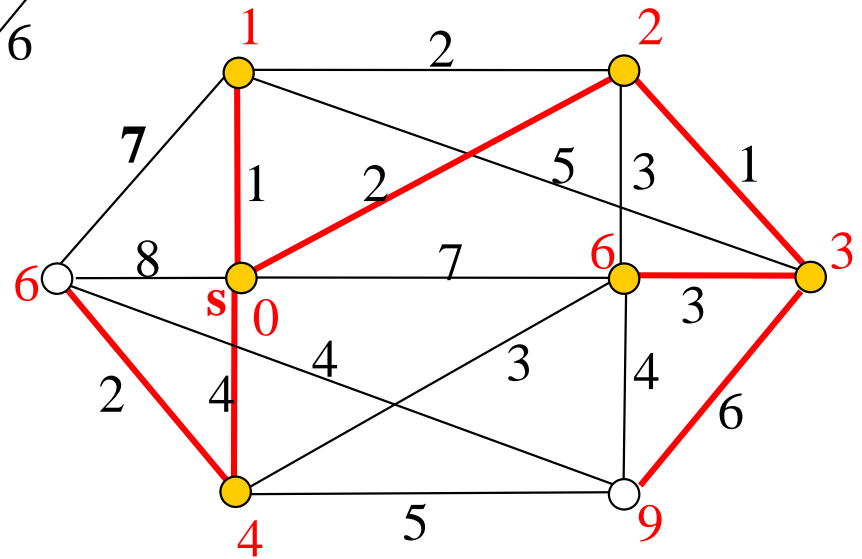
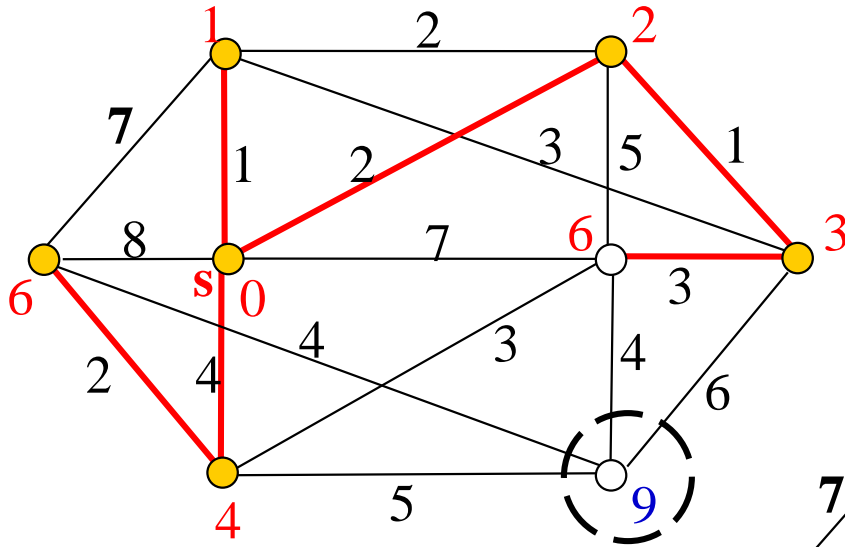


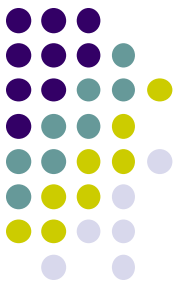






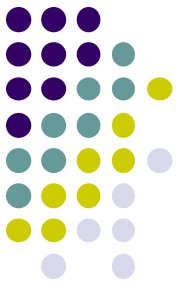
# 求最短路的一个例子(续)





# Dijkstra算法的描述

1. 初始化:  $i=0, S_0=\{s\}, L(s)=0$ , 对其它一切  $v \in V_G$ , 将  $L(v)$  置为  $\infty$ 。  
若  $n=1$ , 结束。
2.  $\forall v \in S_i' = V_G - S_i$ , 比较  $L(v)$  和  $L(u_i) + W(u_i, v)$  的值 ( $u_i \in S_i$ )  
如果  $L(u_i) + W(u_i, v) < L(v)$ , 则将  $v$  的标注更新为  $(L(u_i) + W(u_i, v), u_i)$ ,  
即:  $L(v) = \min\{L(v), \min_{u \in S_i}\{L(u) + W(u, v)\}\}$
3. 对所有  $S_i'$  中的顶点, 找出具有最小  $L(v)$  的顶点  $v$ , 作为  $u_{i+1}$
4.  $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$
5.  $i = i+1$ ; 若  $i=n-1$ , 终止。否则: 转到第2步。



# Dijkstra算法的分析

- 可终止性

- 计数控制

- 正确性

需证明当算法终止时

- $L(v)=d(s, v)$ 对一切 $v$ 成立。
- 由标记中的诸 $u_i$ 确定的路径是一条最短路径

(这里 $d(s, v)$ 是 $s$ 到 $v$ 的最短路径长度，即距离。)

- 复杂性

- $O(n^2)$

# 旅行商问题

## (Travelling Salesman Problem, TSP)

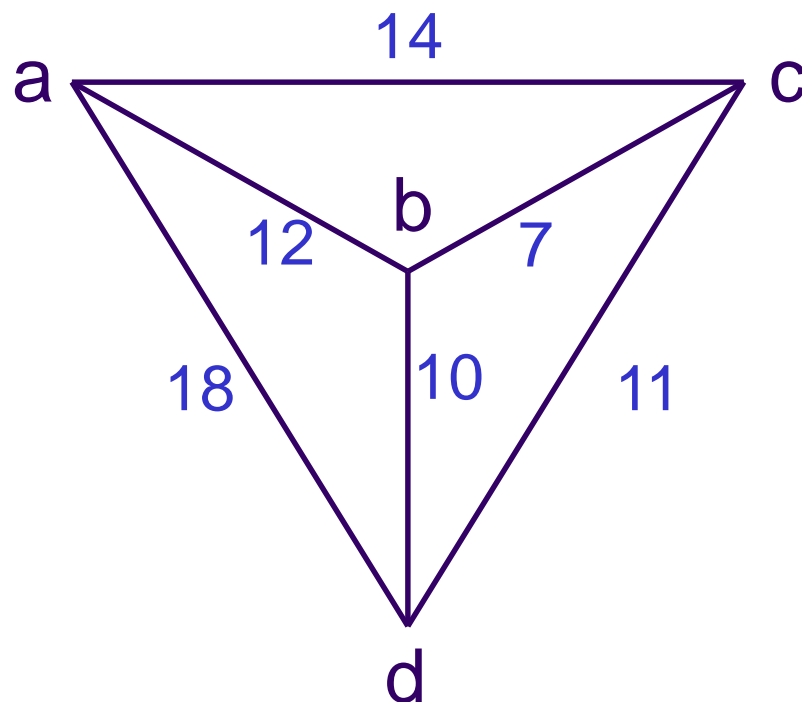


- $n$ 个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它 $n-1$ 城市各一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
  - 数学模型：
    - 无向带权图 $G$ ：顶点对应于城市，边对应于城市之间的道路，道路长度用相应边的权表示。
    - 问题的解：权最小的哈密尔顿回路。
    - $G$ 是带权完全图，总共有 $(n-1)!/2$ 条哈密尔顿回路。因此，问题是如何从这 $(n-1)!/2$ 条中找出最短的一条。
- (含25个顶点的完全图中不同的哈密尔顿回路有约 $3.1 \times 10^{23}$ 条，若机械地检查，每秒处理 $10^9$ 条，需1千万年。)

# 旅行商问题



- 一个货郎（销售员）生活在城市a，假定访问的城市是d, b, c，然后回到a，求完成这次访问的最短路径的距离。





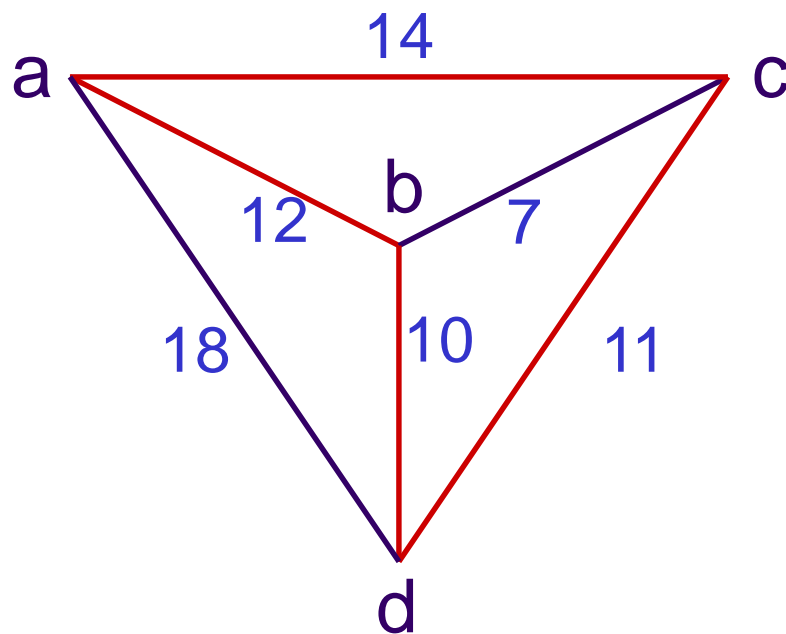
# 旅行商问题

- 解：列出哈密尔顿回路，并求其距离：

(1)  $(abcda) = (12+7+11+18) = 48$

(2)  $(acbda) = (14+7+10+18) = 49$

(3)  $(abdca) = (12+10+11+14) = 47$



# 旅行商问题

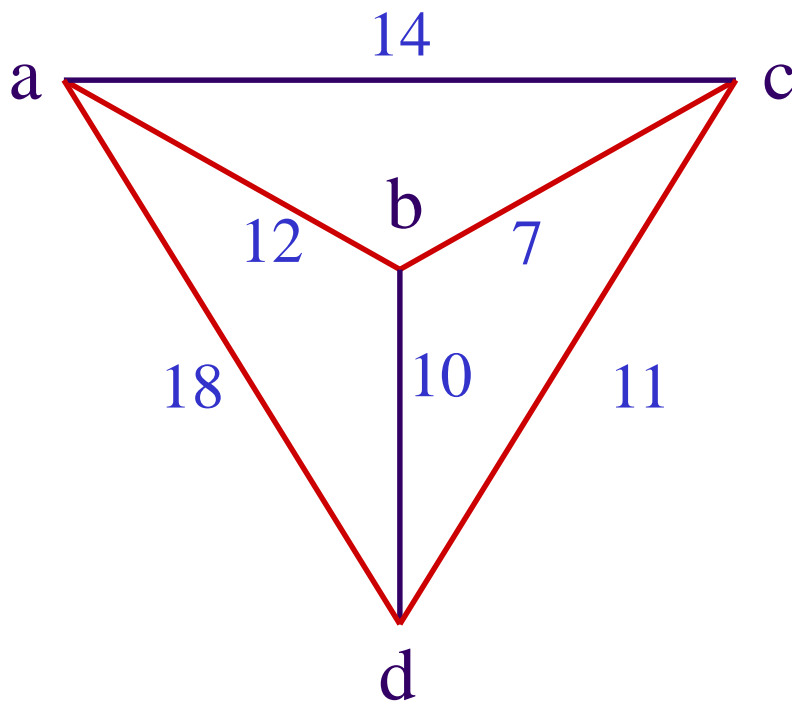


- 哈密尔顿回路（路径）的最短路径问题！
- 下面介绍一种最邻近算法：
  - (1) 选择任一顶点作为始点，找出离始点距离最小的顶点，形成一条边的初始路径；
  - (2) 设 $u$ 是最新加到这条路径上的顶点，从不在这条路径上的所有顶点中选择一个与 $u$ 距离最小的顶点，把连接 $u$ 与此结点的边加入路径中；重复执行直到 $G$ 中的各顶点均含在这条路径中。

# 旅行商问题



(3) 把始点到最后加入的顶点的边放入路径中得到一条哈密尔顿回路，并为近似最短的哈密尔顿回路。





# 旅行商问题(TSP)的研究进展

- (在最坏情况下) 时间复杂性为多项式的算法?
- (在最坏情况下) 时间复杂性为多项式的近似算法
  - 保证:  $W \leq W' \leq cW$  ( $c=3/2$ ), 误差为50%
- 实际应用中, 已有好的算法能够在几分钟内处理1000个节点的规模, 误差在2%。

# 作业

- 见课程网站

