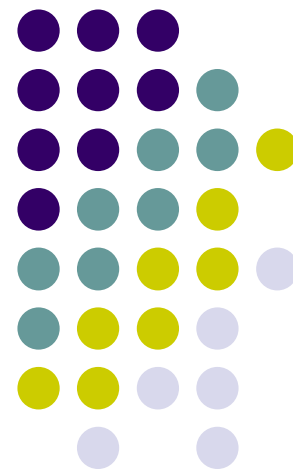


树的应用

离散数学—树

南京大学计算机科学与技术系





内容提要

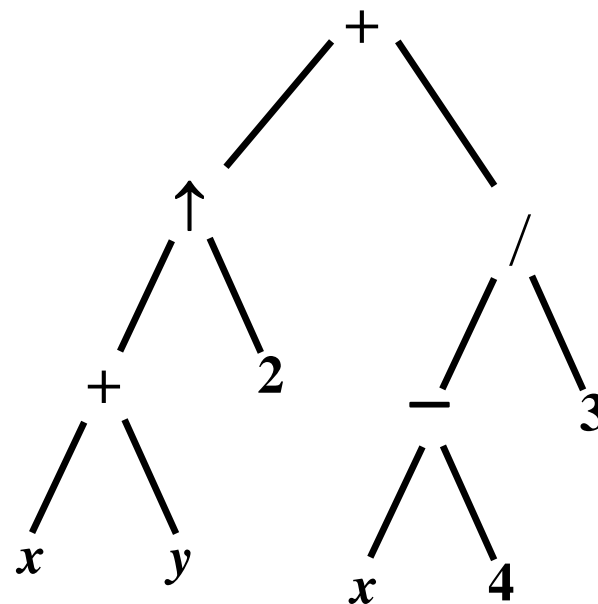
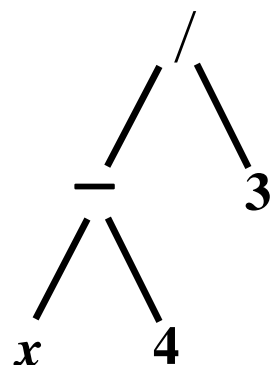
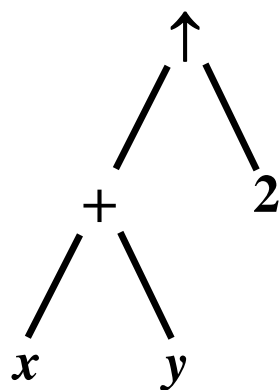
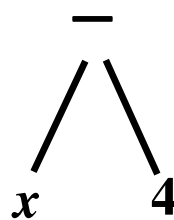
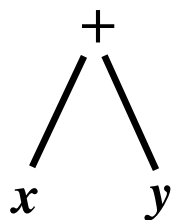
- 表达式的（逆）波兰记法
- 二叉搜索树
- 决策树
- 前缀码
- **Huffman**编码（算法）

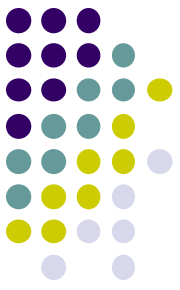




表达式的根树表示

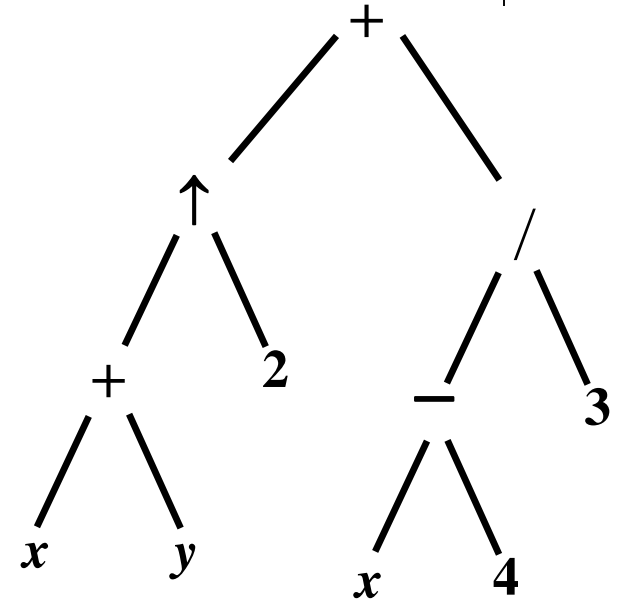
- 用根树表示表达式：内点对应于运算符，树叶对应于运算分量。
- 举例： $((x+y)^2 + ((x-4)/3))$

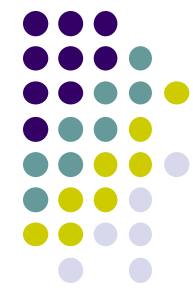




表达式的（逆）波兰表示法

- $(x+y)^2 + ((x-4)/3)$
- 前缀形式（波兰表示法）
 - $+ \uparrow +xy^2 /-x4 3$
- 后缀形式（逆波兰表示法）
 - $xy+2 \uparrow x4- 3/+$
- 中缀形式
 - $x+y \uparrow 2 + x-4/3$





中缀表示法的缺陷

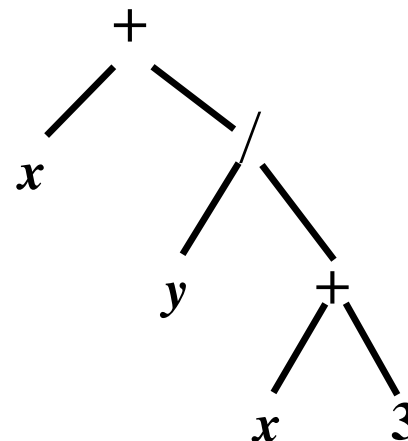
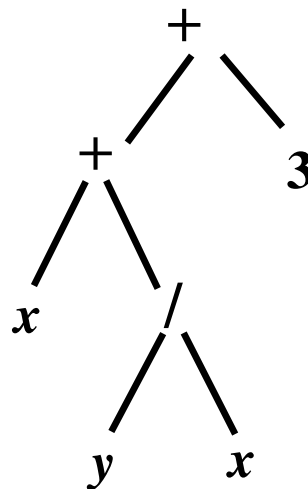
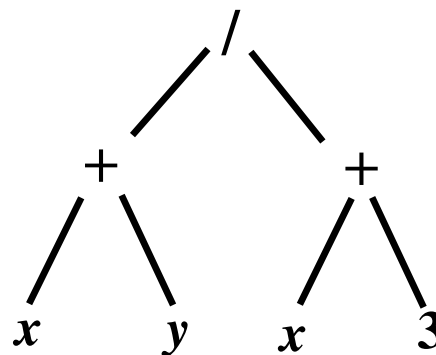
- 中缀形式: $x+y/x+3$

- 有3种解释:

- $(x+y)/(x+3)$

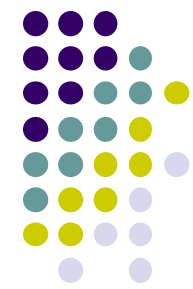
- $x+y/x+3$

- $x+y/(x+3)$



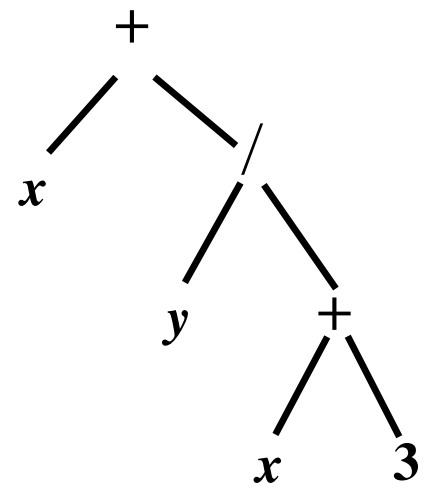
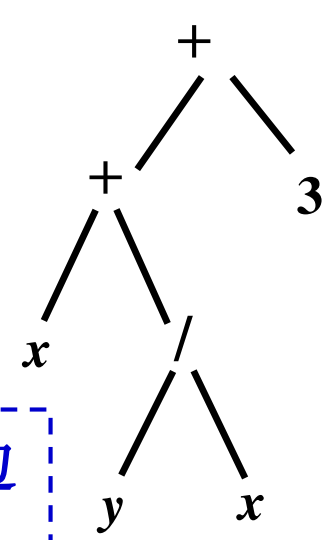
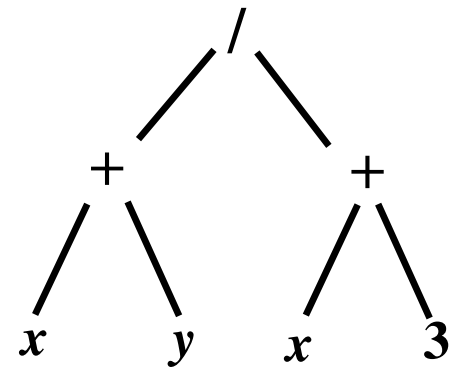
不同的根树有相同的中缀形式。

前缀与后缀则有一定的唯一性。(p. 565: 26-27)



前缀表示法（波兰表示法）

- $(x+y)/(x+3)$
 - $/+xy+x3$
- $x+y/x+3$
 - $++x/yx3$
- $x+y/(x+3)$
 - $+x/y+x3$

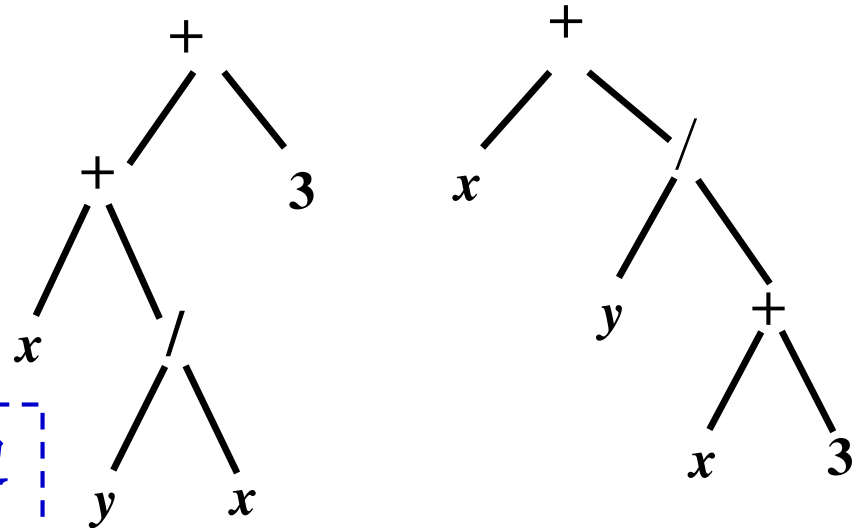
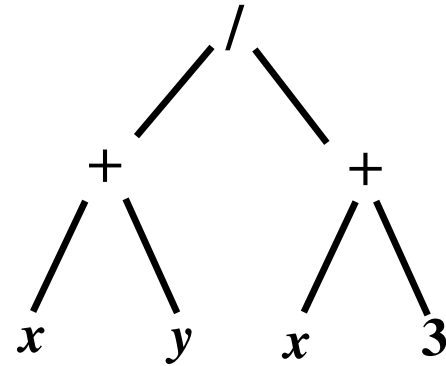


从右向左，遇到运算符，对右边紧接着的2个运算对象进行运算



后缀表示法（逆波兰表示法）

- $(x+y)/(x+3)$
 - $xy+x3+ /$
- $x+y/x+3$
 - $xyx/+3+$
- $x+y/(x+3)$
 - $xyx3+ / +$

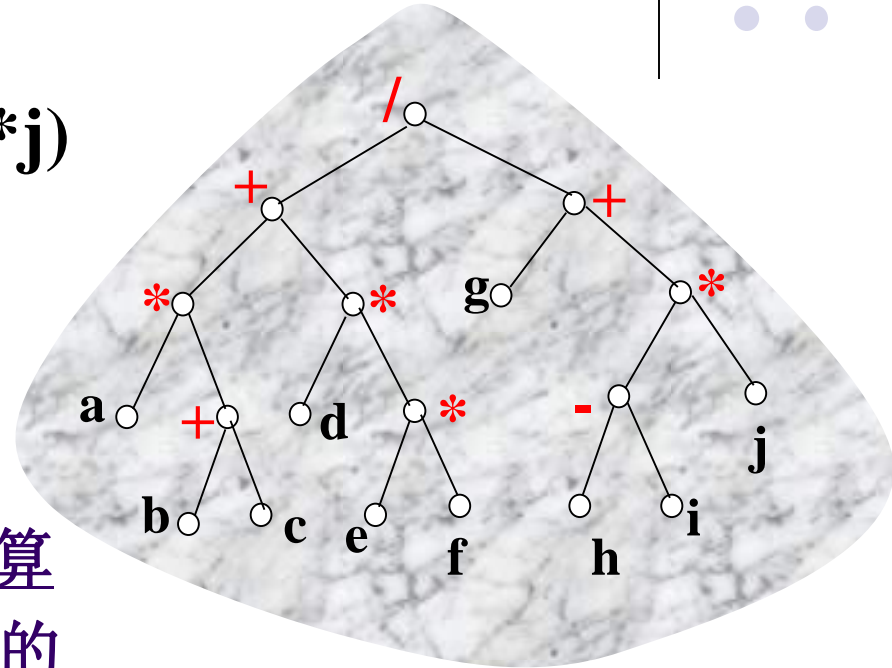


从左向右，遇到运算符，对左边紧接着的2个运算对象进行运算



后缀表示法（逆波兰表示法）

- $(a*(b+c)+d*(e*f))/(g+(h-i)*j)$
- 逆波兰表示：
 - $abc+*def**+ghi-j*+/\$



从左往右，遇到运算符，根据运算符所需运算分量个数确定前面的元素作为运算分量。

不需要括弧唯一地表示计算顺序。



后缀表达式求值

$$7 \ 2 \ 3 \ * \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

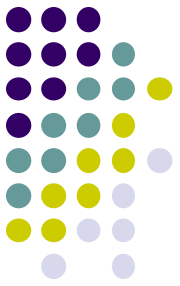
$$7 \ 6 \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

$$1 \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

$$1 \ 9 \ 3 \ / \ +$$

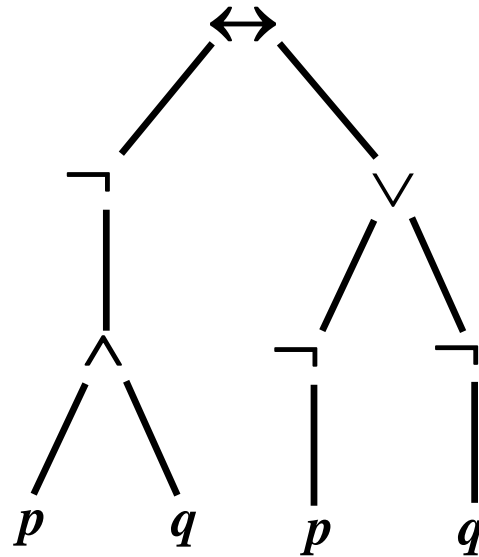
$$1 \ 3 \ +$$

$$4$$

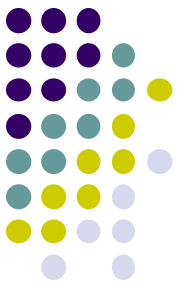


复合命题的根树表示

命题: $(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

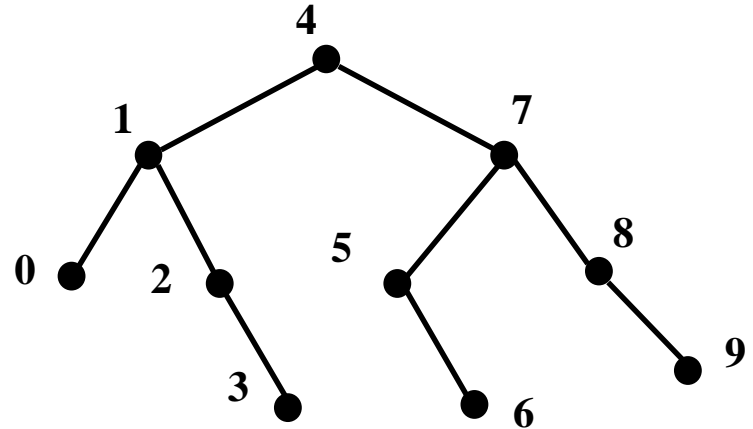


后缀形式: $pq \wedge \neg p \neg q \neg \vee \leftrightarrow$



二叉搜索树

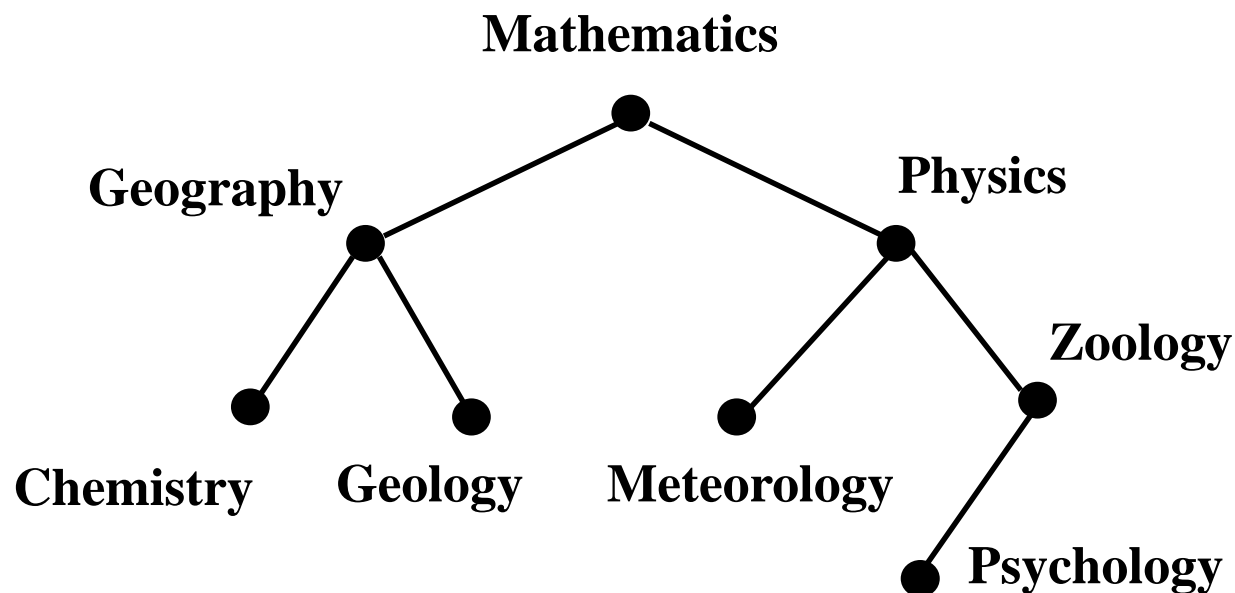
- 二叉搜索树满足下列条件
 - 二叉树，各顶点的子女非左即右，左或右都不超过一个。
 - 每个顶点有一个唯一的标号，该标号取自一个全序集。
 - 若 u 是树中任意的顶点，则：
 - u 的左子树中任意顶点的标号小于 u 的标号。
 - u 的右子树中任意顶点的标号大于 u 的标号。





构造二叉搜索树（举例）

mathematics, physics, geography, zoology, meteorology,
geology, psychology, chemistry





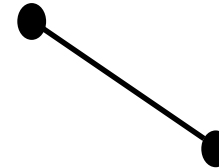
构造二叉搜索树（举例）

mathematics, physics, geography, zoology, ...

Mathematics

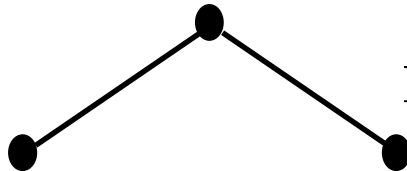


Mathematics



Physics

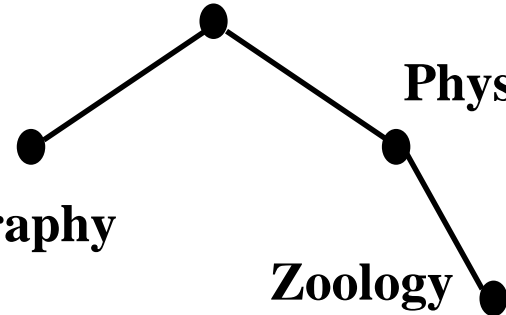
Mathematics



Physics

Geography

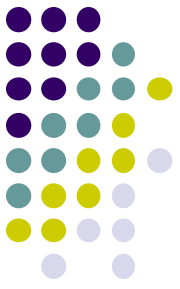
Mathematics



Physics

Geography

Zoology



二叉搜索树算法

Procedure insertion(T: binary search tree, x:item) //定位或添加

$v := \text{root of } T$ // v 可能为null

if $v = \text{null}$ **then** add a vertex to the tree and label it with x

while $v \neq \text{null}$ and $\text{label}(v) \neq x$ {

if $x < \text{label}(v)$ **then**

if left child of $v \neq \text{null}$ **then** $v :=$ left child of v

else add *new vertex* as a left child of v and set $v := \text{null}$

else

if right child of $v \neq \text{null}$ **then** $v :=$ right child of v

else add *new vertex* as a right child of v and set $v := \text{null}$

}

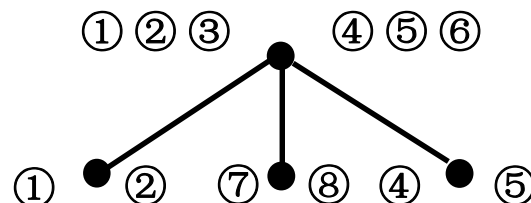
if v is null **then** label *new vertex* with x and let v be this *new vertex*

return v



决策树

- 这样的根树，每个内点对应一次决策，子树对应于该决策的后果。根到树叶的通路为一个解。
- 举例：8枚硬币，其中7个等重，一个重量较轻的是伪币，使用天平找出伪币，至少多少次称重？
 - 3元树，至少2次称重才能确保找到。

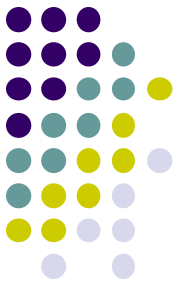


决策树



- 以决策树为模型，排序算法最坏情形复杂性的下界。
- 基于二叉比较的排序算法至少需要 $\lceil \log n! \rceil$ 次比较。
 - $n!$ 个树叶，其二叉树的高度至少为 $\lceil \log n! \rceil$
 - $\Omega(n \log n)$

编码



- 如何从信号流中识别字符
 - 等长度编码 vs. 不等长度编码
- 例子：对包含 {a(45), b(13), c(12), d(16), e(9), f(5)} 6 个字符的 10 万个字符的数据文件编码，每个字符后面的数字表示该字符出现的频率(%)。
 - 编码方案一：a(000), b(001), c(010), d(011), e(100), f(101); 则文件总长度 30 万字位。
 - 编码方案二：a(0), b(101), c(100), d(111), e(1101), f(1100); 则文件总长度 22.4 万字位，空间节省四分之一。



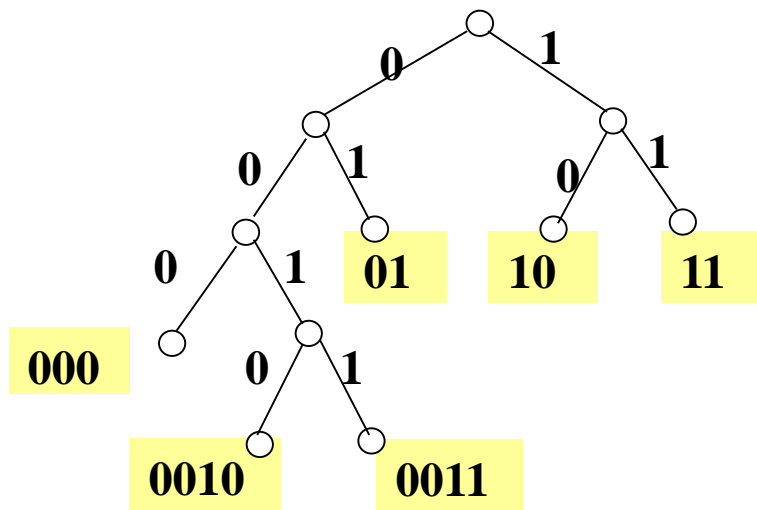
不等长编码的分隔

- 如何从信号流中识别不等长编码表示的字符
 - 显式表示长度：专用位或特定结束信号
 - 匹配的唯一性（比如，前缀码）
- 如果符号串 α 可以表示成符号串 β_1 和 β_2 的并置，则 β_1 称为 α 的一个**前缀**。（注意： β_1 和 β_2 可以是空串。）
- 设 $A=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m\}$ 是符号串的集合，且对任意 $\beta_i,\beta_j\in A$ ，若 $i\neq j$ ， β_i 与 β_j 互不为前缀，则称 A 为**前缀码**。
- 若 A 中的任意串 β_i 只含符号0, 1, 则称 A 是**二元前缀码**。



用二叉树生成二元前缀码

- 生成方法
 - 给边标号：对内点，对其出边标上号，左为0，右为1。
 - 给叶编号：从根到每个树叶存在唯一的通路，构成该通路的边的标号依次并置，所得作为该树叶的编号。
- 给定一棵完全二叉树，可以产生唯一的二元前缀码。





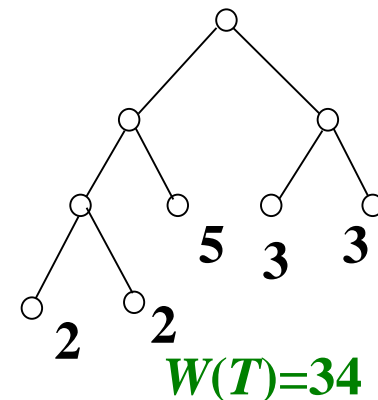
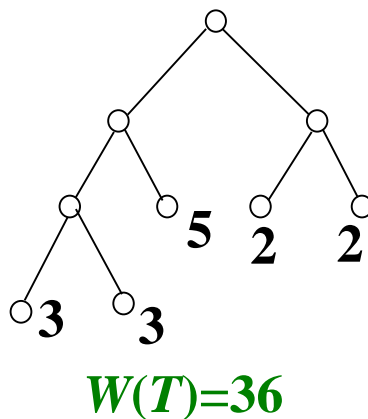
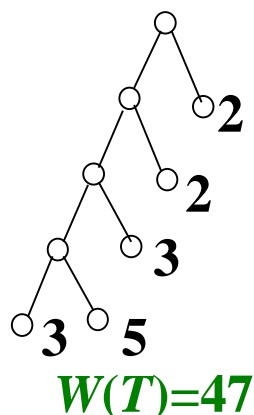
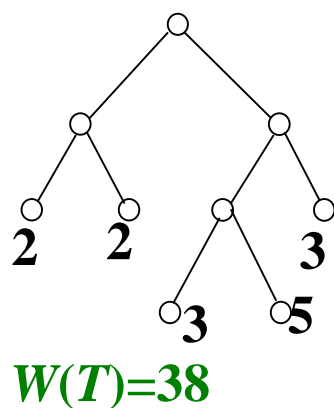
最优前缀码

- 问题：二进前缀码 $A=\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 表示 m 个不同的字母，如果各字母使用频率不同，如何设计编码方案可以使总传输量最少。
- 基本思想：使用频率高的字母用尽量短的符号串表示。
- 问题的解：若用频率(相对值)作为树叶的权，最佳二元前缀码对应的二叉树应该是最优二叉树。



最优二叉树

- 若 T 是二叉树，且每个叶 v_1, v_2, \dots, v_t 带数值权 w_1, w_2, \dots, w_t ，则**二叉树 T 的权 $W(T)$** 定义为： $\sum_{i=1}^t w_i l(v_i)$ ，其中： $l(v_i)$ 表示 v_i 的层数。
- 具有相同权序列的二叉树中权最小的一棵树称为**最优二叉树**。



注意：最优二叉树一定是完全二叉树 ($t \geq 2$)

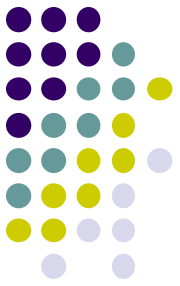
Huffman编码（算法）



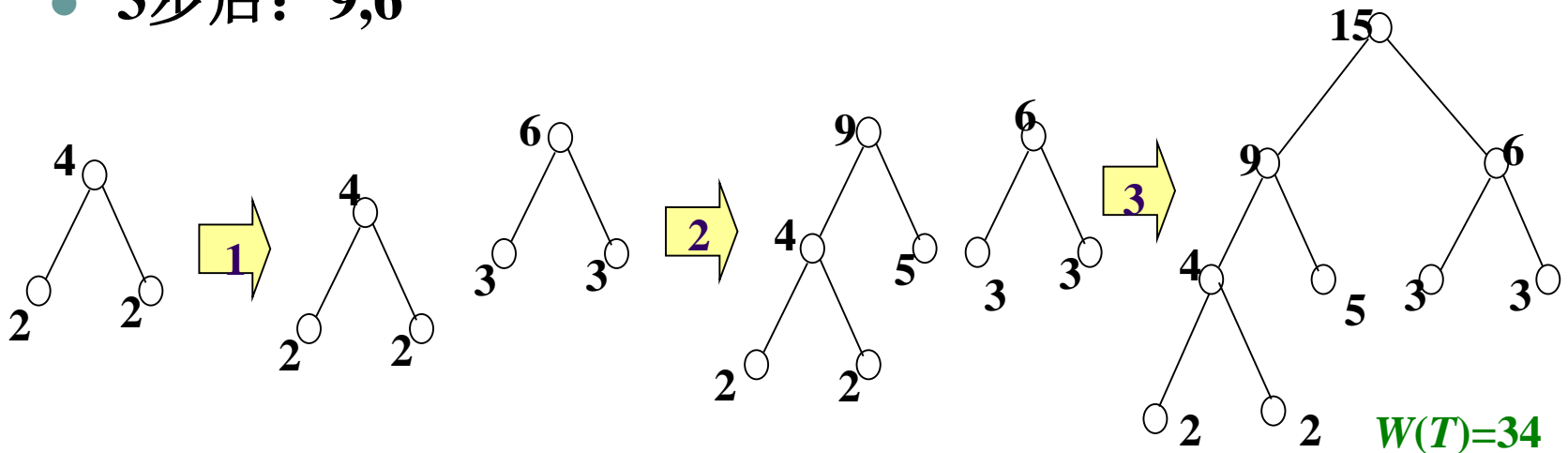
- 输入：正实数序列 w_1, w_2, \dots, w_t 。
- 输出：具有 t 个树叶，其权序列为 w_1, w_2, \dots, w_t 的最优二叉树。
- 过程：
 - T棵根树（森林），其根的权分别是 w_1, w_2, \dots, w_t 。
 - 选择根权最小的两棵树，以它们为左、右子树（合并）生成新的二叉树，其根权等于2棵子树的根权之和。
 - 重复第2步，直至形成一棵树。

注意：结果可能不唯一(如果“当前”权最小顶点对不唯一)。

Huffman编码（算法）：举例



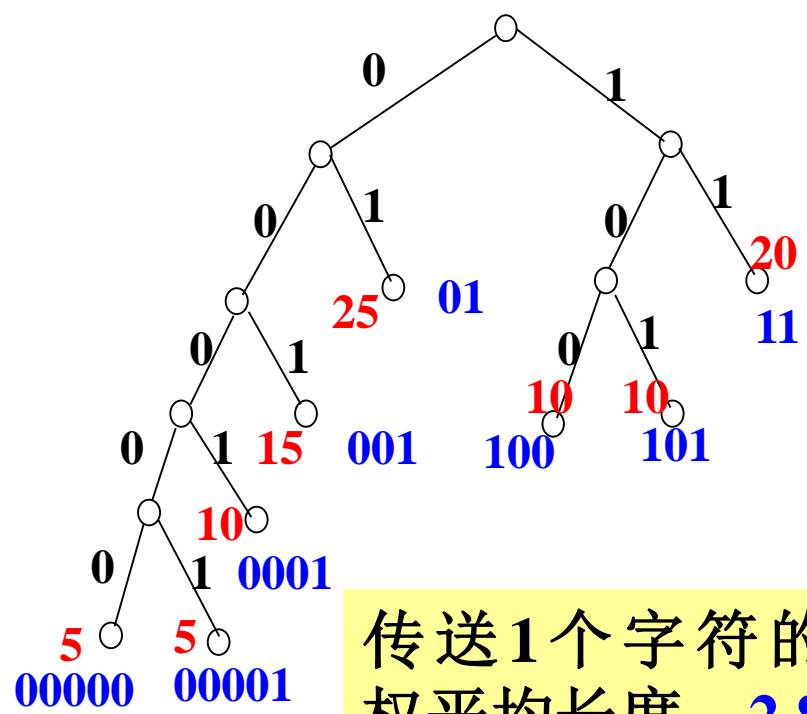
- 例子：开始序列：2,2,3,3,5
 - 1步后：4,3,3,5
 - 2步后：4,6,5
 - 3步后：9,6





一个应用示例

- 八个字符的传输问题
 - 假设八个字符的频率如下：
 - 0: 25% 1: 20%
 - 2: 15% 3: 10%
 - 4: 10% 5: 10%
 - 6: 5% 7: 5%
 - 则对应的权为：
 - 5,5,10,10,10,15,20,25



传送1个字符的加权平均长度: **2.85**

作业

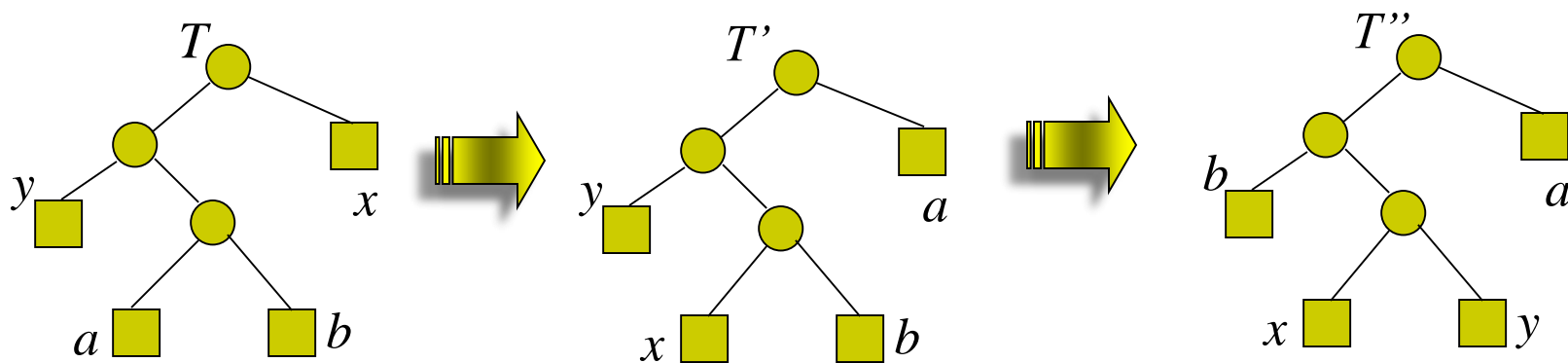
- 见课程网站





Huffman算法的正确性

设 C 是字母表，其中每个字符 c 的频率为 $f[c]$ 。若 x, y 是两个频率最小的字符，则必存在 C 的一种最优前缀码，使得 x, y 的编码仅有最后一位不同。



T 为任意最优前缀码

在上图的变换中，二叉树的权保持不变，
即： $W(T) \geq W(T') \geq W(T'') \geq W(T)$



保持权不变的变换

不妨假设 $f[a] \leq f[b]$, $f[x] \leq f[y]$; 于是 $f[x] \leq f[a]$, $f[y] \leq f[b]$

$$W(T) - W(T') = \sum_{c \in C} f(c)d_T(c) - \sum_{c \in C} f(c)d_{T'}(c)$$

$$= f[x]d_T(x) + f[a]d_T(a) - f[x]d_{T'}(x) - f[a]d_{T'}(a)$$

$$= f[x]d_T(x) + f[a]d_T(a) - f[x]d_T(a) - f[a]d_T(x)$$

$$= (f[a] - f[x])(d_T(a) - d_T(x)) \geq 0$$

$\therefore W(T) \geq W(T')$; 同理, $W(T') \geq W(T'')$; 但 $W(T)$ 最小

$$\therefore W(T) = W(T') = W(T'')$$

Huffman算法的正确性（续）



C 是字母表, $f[c]$ 为字符 c 的频率, x, y 是两个频率最小的字符。令 $C' = C - \{x, y\} \cup \{z\}$, $f[z] = f[x] + f[y]$, 若 T' 是 C' 的最优二叉树, 则将顶点 z 替换为分支点, 并以 x, y 为其子女, 所得 T 是 C 的一棵最优二叉树。

$$d_T(x) = d_T(y) = d_{T'}(z) + 1,$$

$$\begin{aligned} \text{因此, } f[x]d_T(x) + f[y]d_T(y) &= (f[x] + f[y])(d_{T'}(z) + 1) \\ &= f[z]d_{T'}(z) + (f[x] + f[y]) \end{aligned}$$

$$\text{于是, } W(T) = W(T') + (f[x] + f[y])$$

如果存在 T'' 满足 $W(T'') < W(T)$, 不失一般性, x 与 y 在 T'' 中为siblings.

将 x, y 连同它们的父结点替换为一叶结点 z , 并令 $f[z] = f[x] + f[y]$, 设得到的新树为 T''' , 则:

$$\underline{W(T''')} = W(T'') - f[x] - f[y] < \underline{W(T)} - f[x] - f[y] = \underline{W(T')}, \text{ 矛盾。}$$