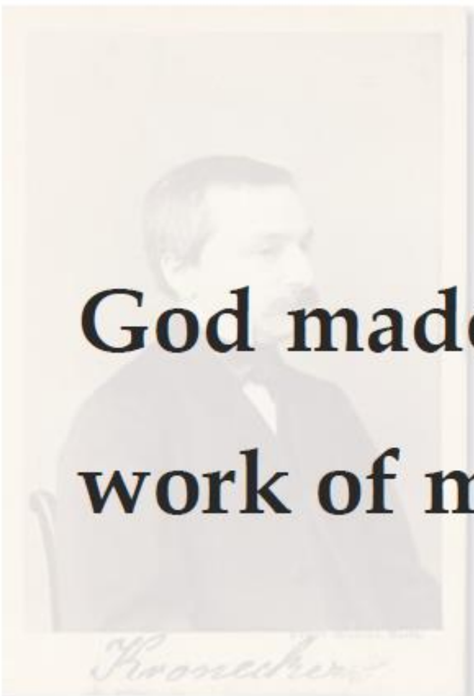
集合的基数

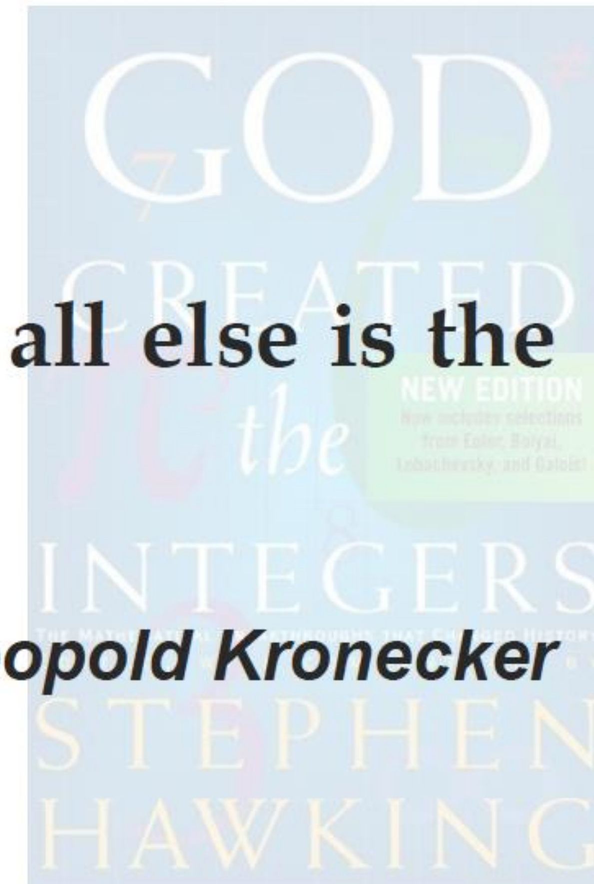
离散数学：第八讲

提要

- 集合的大小
- 无限集合
- 等势与优势关系
- 集合计数
- 容斥原理

自然数与无穷集合





God made the integers; all else is the work of man.

—— ***Leopold Kronecker***

我们怎么比较集合的大小

- “数得清”的我们就数元素个数。
- “无数”的怎么办？
  - “常识”不一定经得起追问。
- 集合的大小称为集合的“势” (cardinality)
  - 集合S的势记为$|S|$

有限与无限：“宇宙旅馆”

啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 k 号房间的客人移到 k+1 号。你就住进第 1号房间吧！

集合的等势关系

- 等势关系的定义：
  - 如果存在从集合A到集合B的**双射**，则称集合A与B**等势**。
  - 集合A与B等势记为：$A \approx B$, 否则$A \not\approx B$
  - $A \approx B$意味着：A，B中的元素可以“**一一对应**”。
  - 要证明$A \approx B$，找出*任意一个*从A到B的双射即可。
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

自然数集是无限集

- 证明：自然数集$\mathbb{N}$是无穷集

反设$\mathbb{N}$有穷，从而存在n以及双射函数$f: n \to \mathbb{N}$，令

$\boldsymbol{m = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + 1}$，从而有$\forall x \in n, f(x) \neq m$，故$f$非满射，矛盾！故$\mathbb{N}$为无穷集. $\square$

可列集

- 上述定义中，可列集的直观概念可以看作集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出它“前一个”、“后一个”元素是什么
- 例如：整数集与自然数集等势，故$\mathbb{Z}$为可列集

  0，-1，1，-2，2，-3，3，-4，…

可列集

- 证明：构造如下$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$，易见$f$为双射.

将 Z 中元素以下列顺序排列并与 N 中元素对应：

$$\begin{array}{cccccccc} Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots \end{array}$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: Z \to N, f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

有限集与无限集

- S是有限集合，iff. 存在自然数n，使得S与n等势
- S不是有限集合(即：无限集)，iff. 存在S的真子集S’，使得S与S’等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集M = $\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ (这实际上意味着：自然数集是“最小的”无限集)

令$S'=S-\{a_1\}$，可以定义f:S→S’如下：

对于任意$x\in M$, $f(a_i)= a_{i+1}$； 对于任意$x\in S-M$, $f(x)= x$

显然这是双射，即S与其真子集S'等势

$\Leftarrow$ 假设S是有限集，令$|S|=n$, 则给S任意的真子集S', 若$|S'|=m$，必有$m<n$, 因此从S'到S的任一单射不可能是满射。

有穷与无穷：差别不仅是数量

- 伽利略悖论：
  - 传统公理："整体大于部分"
  - 伽利略发现：$\{1,2,3,\ldots\}$与$\{1^2,2^2,3^2,\ldots\}$一一对应。

证明无限集等势的例子

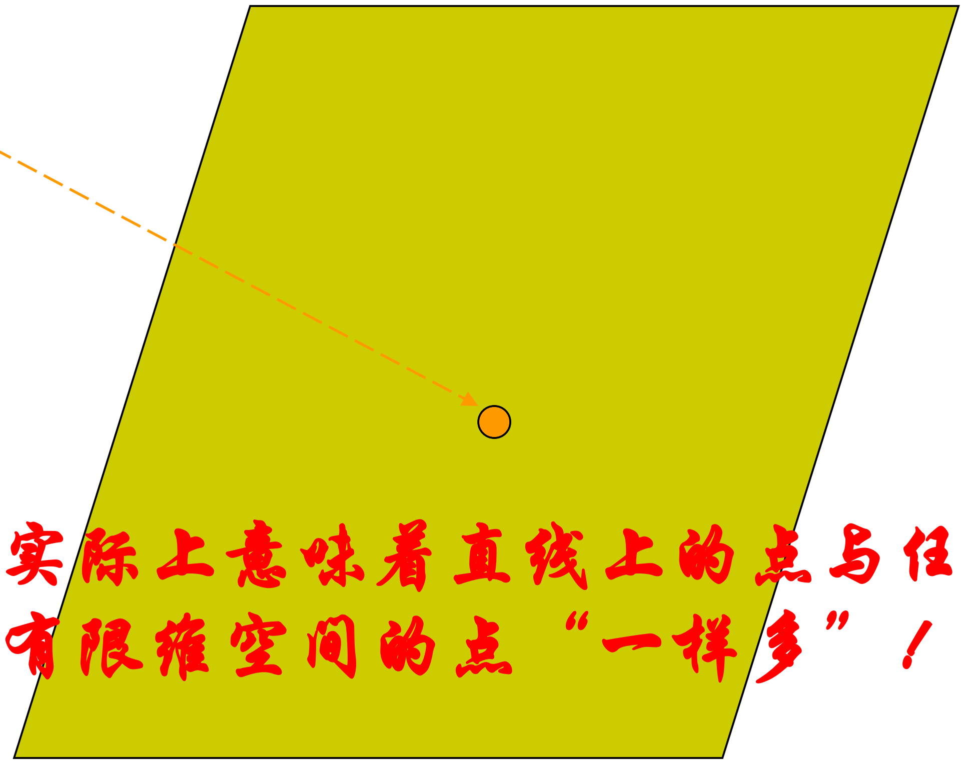
- (0,1)与整个实数集等势
  - 双射：$f:(0,1)\to R:f(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\dfrac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数a,b($a<b$), [0,1]与[a,b]等势
  - 双射：$f:[0,1]\to[a,b]:f(x)=(b-a)x+a$

    (这实际上意味着：任意长的线段与任意短的线段等势)

直线上的点集与平面上的点集等势

$$\left\{\begin{array}{l}0.a_1a_2a_3\ldots\ldots\\ 0.b_1b_2b_3\ldots\ldots\end{array}\right.$$

$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ldots$$



这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

康托尔定理

- 任何集合与其幂集不等势.即：$A \not\approx \rho(A)$
  - 证明要点：

设g是从A到$\rho(A)$的函数，构造集合B如下：

$B=\{x \mid x \in A, \text{但} x \notin g(x)\}$

则$B \in \rho(A)$，但不可能存在$x \in A$，能满足$g(x)=B$，因为，如果有这样的x, 则$x \in B$ iff. $x \notin B$。

因此，g不可能是满射。

集合的优势关系

- 如果存在从集合A到集合B的**单射**，则称“集合B**优势于**集合A”
- 集合B优势于集合A 记为 A≼•B
- 如果集合B优势于集合A，且B与A***不等势***，则称“集合B**真优势于**集合A”，记为A≺•B

- 实数集合真优势于自然数集
- 例子：对任意集合A，A的幂集**真优势于**集合A

集合优势关系的性质

- 自反性：恒等函数
- 若A≼•B，且B≼•A，则A≈B **(比较:反对称性)**

  (Cantor-Bernstein定理)
- 传递性：单射的复合仍然是单射

优势关系的反对称性用于证明等势

- 有时候找双射不太容易
  - 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。

关键是如何安排在[0,1]中但不在(0,1)中的0和1。

想象那个“宇宙旅馆”。我们可以取(0,1)的一个与自然数集合等势的子集(一定有)$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$,“腾出”前两个位置安排0和1

一种证法： $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & x=0 \\ \frac{1}{2^2} & x=1 \\ \frac{1}{2^{n+2}} & x=\frac{1}{2^n}, n=1,2,3\ldots \\ x & x\text{为其它值} \end{cases}$

优势关系的反对称性用于证明等势 (续)

- 证明实数集的两个子集(0,1)和[0,1]等势。
- 分别找两个一对一的映射往往比找一个双射容易

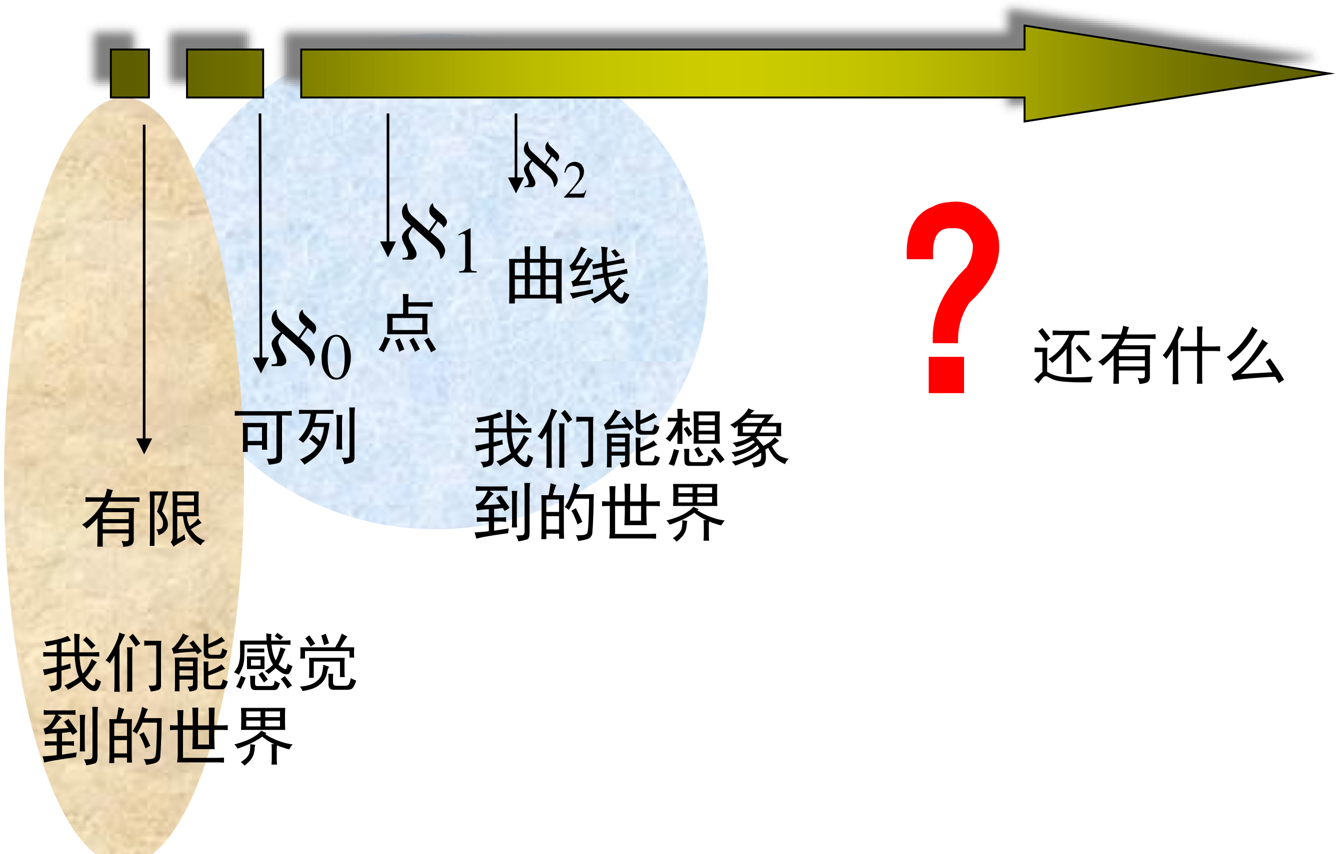
$$f:(0,1)\to[0,1]:\ f(x)=x$$

$$g:[0,1]\to(0,1):g(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\qquad \text{注意}: g([0,1])=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$$

等势关系是等价关系

- 自反性：I_A:A→A
- 对称性：如果f:A→B是双射，则f的反函数f^{-1}:B→A，也是双射。
- 传递性：如果f:A→B，g:B→C均是双射，则 $g \circ f$ 是从A到C的双射。
- 例子
  - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。

集合的“大小” – 基数



集合A的基数

- 若A与自然数n等势，则card A = n
- 若A与自然数集合N等势，则card A = $\aleph_0$
- 若A与实数集合R等势，则card A = $\aleph$
- 如果存在从A到N的单射，则称A为可数集，或可列集。[card A $\leq$ $\aleph_0$]

自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的整数对构成的集合与自然数集等势

<0,0>	<1,0>	<2,0>	<3,0>	<4,0>	•••
<0,1>	<1,1>	<2,1>	<3,1>	•••	
<0,2>	<1,2>	<2,2>	•••		
<0,3>	<1,3>	•••			
<0,4>					

类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ...

$$l(m,n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

实数集不是可列集

- 注意：(0,1)与实数集合等势
- 证明：

实数集不是可列集

- 命题：实数集非可列集
- 证明（**Cantor's diagonalization argument**, 1891）：

由于$\mathbb{R} \approx [0,1]$，故只需要说明$[0,1]$之间的实数点集不可列即可。首先约定实数$x \in [0,1]$，令$x = 0.x_1x_2x_3\cdots(0 \le x_i \le 9)$，对于无限循环小数$0.249999\cdots$与$0.250000\cdots$统一只采用后者的表示法表示；

- 证明（**Cantor's diagonalization argument**）（续）：

假设[0,1]之间用上述方法表示的实数~~可列~~，则[0,1]上的值可列举为：

$$
\begin{array}{l}
0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\ldots \\
0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\ldots \\
0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\ldots \\
0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\ldots \\
\vdots
\end{array}
$$

今取实数$y \in [0,1]$，将其表为$\mathbf{0}.\boldsymbol{b_1 b_2 b_3}\cdots$，并令$\boldsymbol{b_i} \neq \boldsymbol{b_{ii}}\ (i = 1,2,3,\cdots)$。易见，$y$与上表中任何一个值均不等，上述假设错误。即实数集$\mathbb{R}$是不可列集. □

0到1之间有理数多还是无理数多？

南京大学小百合站 -- 主题文章阅读 [讨论区: Pictures][回帖预定]

添加标签 +

追踪此人

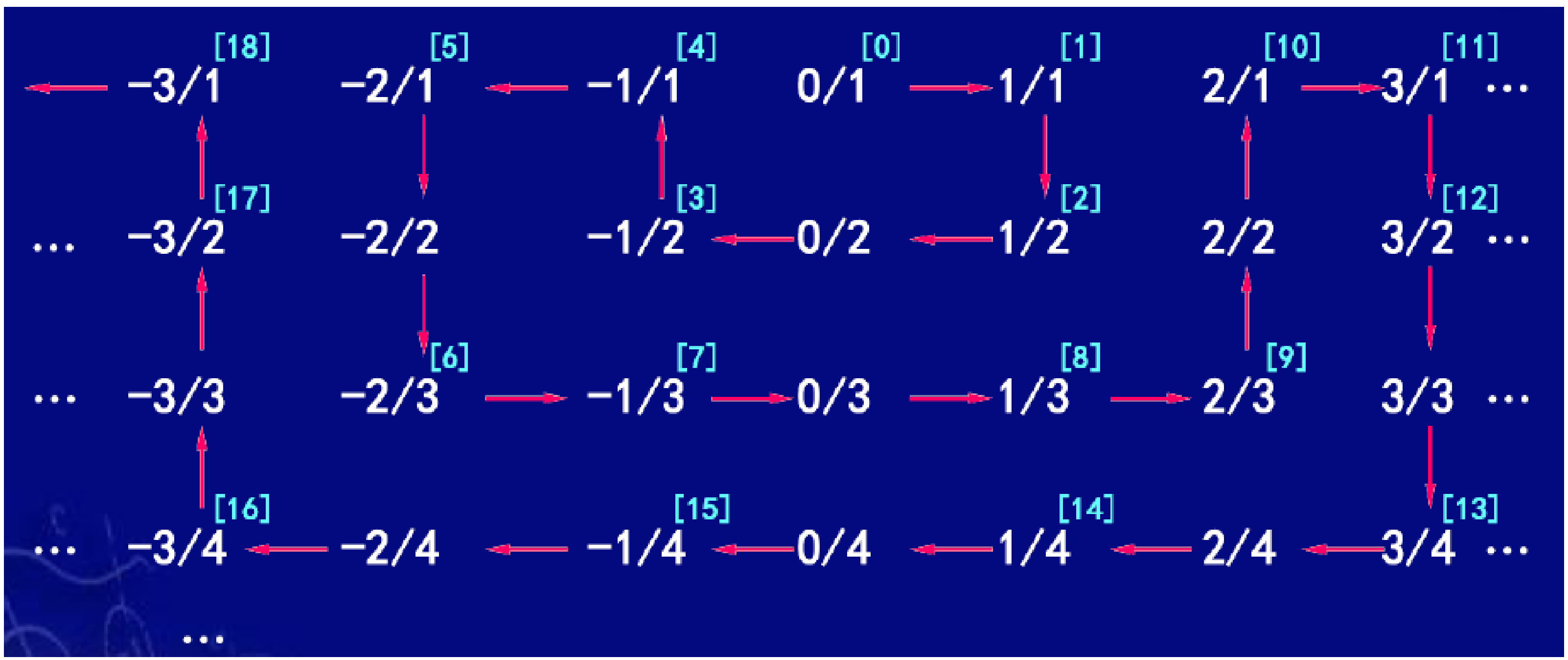
[本篇全文] [回复本文] [本篇作者: xuq(男生)] [本篇人气: 2251]

发信人: xuq (mossad), 信区: Pictures
标　题: 0到1之间有理数多还是无理数多
发信站: 南京大学小百合站 (Tue Mar 15 16:50:37 2011)

这是一个面试题，我觉得是无理数多，但不知道怎么解释。求证明！

- **证明：**

  (1) 易构造如下双射$f:\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$，故$\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$，为可列集



■ 证明（续）：

(2) 用Cantor对角线法易证$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$不可列，故

$|\mathbb{R}-\mathbb{Q}|=\aleph$

因此$\mathbb{Q}\prec\cdot\,\mathbb{R}-\mathbb{Q}$，即[0,1]内无理数的基数比有理数大.

$\square$

实数集与ρ(N)等势

- $[0, 1) \approx \{0, 1\}^N$ 从而 $R \approx \rho(N)$
  - [0,1)中的数唯一地表示为$0.b_1b_2b_3b_4\ldots$
    不容许连续无数个1，比如1/2=0. 1000… (NOT 0.0111…)
  - $f: [0, 1) \to \{0, 1\}^N$
    $0.b_1b_2b_3b_4\ldots \to b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$
    f是单射
  - $g: \{0, 1\}^N \to [0, 1)$
    $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots \to 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ //看做十进制数
    g是单射
  - 根据Bernstein定理，得证

教材和作业

- 教材：
  - 2.4.5;   5.1.4;   7.5;   7.6
- 习题：
  - 见课程网站