数论初步

离散数学

南京大学计算机科学与技术系

提要

- 整数的性质
- 整数的基本运算
- 质数
- Euler函数与Euler定理

什么是数论？

- 数论是纯数学的一个分支，也是纯数学的代表，它主要研究**整数**的性质
- 数论的早期研究可追溯至Euclid时期（~300 B.C.）：对质数和整除的研究
- 中国古代（~400 A.D.）对同余方程的研究为现代数论作出了基础性贡献

现代数论的早期铺垫

- 证明质数无穷

  ——Euclid：*Elements* （~300 A.D.）

- 筛法寻找质数

  —— Eratosthenes （~250 A.D.）

- 辗转相除法求最大公约数

  ——Euclid： *Elements*（~300 A.D.）

- 求解同余方程的中国剩余定理

  ——《孙子算经》 （~420 B.C.）

整数集

- 整数集一般记为$\mathbb{Z}$（来源于德语“数”：*Zahlen* 的首字母），同时用$\mathbb{Z}^+$表示正整数集（$\mathbb{N}-\{0\}$），用$\mathbb{Z}^-$表示负整数集（$\mathbb{Z}-\mathbb{N}$）
- $\mathbb{Z}$为可列集：$\mathbb{Z}\approx\mathbb{N}$，基数为$\aleph_0$
- $\mathbb{Z}$是全序集（未来课程详述），无上界和下界
- $\mathbb{Z}$和加法运算形成一个循环群（未来课程详述）；和加法运算及乘法运算形成一个环（参见抽象代数资料*）

整除

- 整除（divisible）是定义在$\mathbb{Z}$上的二元关系：
  设$a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$，$a|b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{Z})(b = a \times c)$
- $a|b$读作“a整除b”
- 设$a, b, c \in \mathbb{Z}$且$a \neq 0$，有：
  - $(a|b) \wedge (a|c) \rightarrow a|(b + c)$
  - $a|b \rightarrow a|(b \times c)$
  - $(a|b) \wedge (b|c) \rightarrow a|c$

余数

- 余数（remainder）来源于带余除法
- 定义（带余除法）：令$a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^{+}$，则：

  $$(\exists!\, q, r \in \mathbb{Z} \land 0 \le r < d)(a = d \times q + r)$$

  - 其中，a称为被除数（dividend），d称为除数（divisor），q称为商（quotient），r称为余数
  - 记：$q = a \operatorname{div} d$，$r = a \bmod d$，后者读作“$a$模$b$”
- 例：$\because -11 = 3 \times (-4) + 1$，$\therefore -11 \bmod 3 = 1$

余数

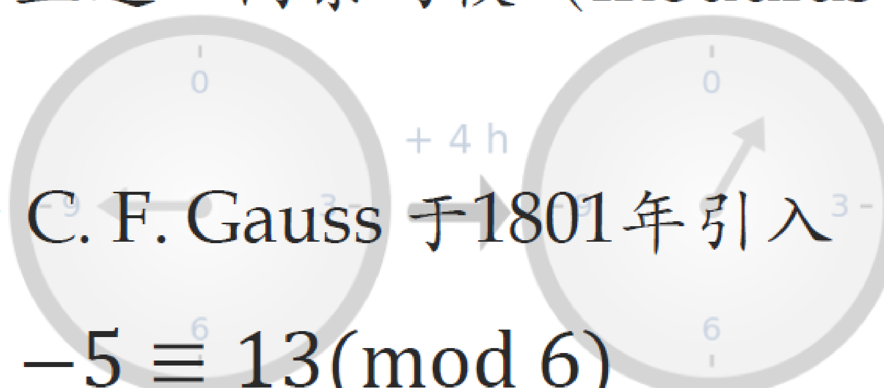
- 模的基本性质：令$a, b \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+$，则：
  - $(a+b) \bmod d = (a \bmod d + b \bmod d) \bmod d$
  - $(a \times b) \bmod d = [(a \bmod d)(b \bmod d)] \bmod d$

同余

- 同余（congruence modulo）是定义在$\mathbb{Z}$上的二元关系：设$a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\ m) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z}^{+})(m|(a-b))$$

  - 上式读作“a与b模m同余（a is congruent to b modulo m）”，称m为上述“同余的模（modulus of the congruent）”
  - 同余关系及符号“≡”由 C. F. Gauss 于1801年引入
- 例：$26 \equiv 14(\mathrm{mod}\ 12)$，$-5 \equiv 13(\mathrm{mod}\ 6)$

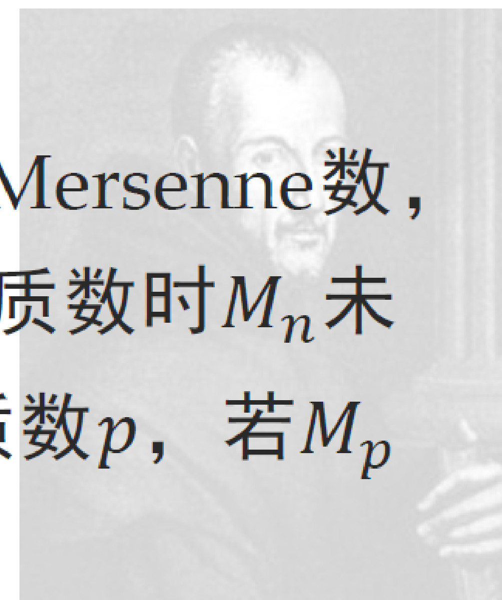


质数

- 仅含2个正因子（1和自身）的大于1的整数称为质数（prime number），大于1的非质数整数称为合数（composite number）
- 定理（算术基本定理）：每个大于1的整数皆可分解为有限个质数之积（这些质数称为质因子），若不考虑顺序，则分解唯一
  - $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}_1^{\alpha_1}\boldsymbol{p}_2^{\alpha_2}\cdots\boldsymbol{p}_k^{\alpha_k}\ (p_1 < p_2 < \cdots < p_k, \alpha_i \in \mathbb{Z}^+)$

质数

- 关于质数的命题可追溯到Euclid时期，最著名的命题之一为《几何原本》所提之：若2^p-1为质数，则$2^{p-1}(2^p-1)$为完全数（本身为其所有真因子之和的数）
- 对$n\in\mathbb{Z}^+$，整数$M_n=2^n-1$被称为Mersenne数，当n为合数时M_n必为合数，但当n为质数时M_n未必——甚至极少——为质数。对某质数p，若M_p为质数，则称M_p为Mersenne质数



质数

- 截至今日，人类共发现48个Mersenne质数
  - M_2, M_3, M_5, M_7 于公元前被发现
  - 前12个Mersenne质数发现于手算时代
  - 在1952–1994年的计算机时代，发现了第13–34个Mersenne质数
  - 在1996年至今，互联网时代的分布式大规模计算发现了第35–48个Mersenne质数（但不知道第44到第48个之间是否还有其它Mersenne质数）
  - 目前已知最大的第48个Mersenne质数是$2^{57885161}-1$，它有17425170位

质数的性质

- 命题：若n为合数，则其必含有不大于$\sqrt{n}$的质因子
- 命题（**Euclid**）：有无穷多质数
  - **证明：** 反设质数有穷，列为$p_1,p_2,\cdots,p_k$，令$q=\prod_{i=1}^{k}p_i+1$，则若q为质数，则其为新的质数，矛盾；若q为合数，因为$\prod_{i=1}^{k}p_i$与q互质，由算术基本定理，q的分解式中的质数均不在$p_1,p_2,\cdots,p_k$中，为新的质数，矛盾。原命题成立。 $\square$

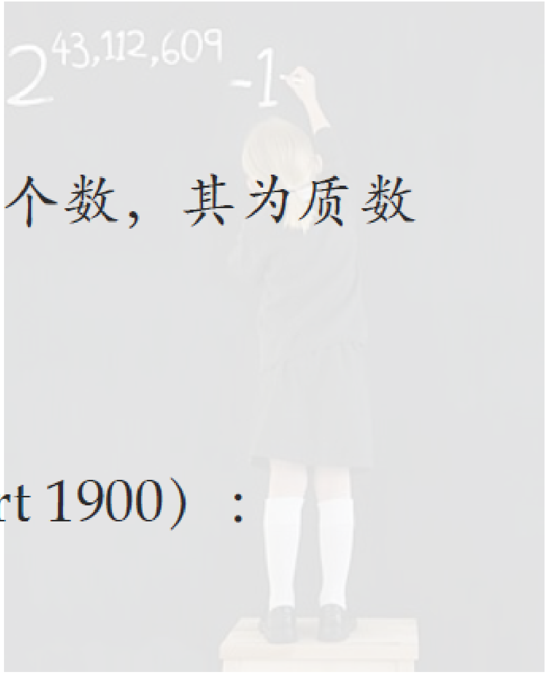
质数定理

- **定理*（质数定理）**：设$x \in \mathbb{R}^+$，$\pi(x)$为质数计数函数（*i.e.* 不大于x的质数的个数），有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$$

  - 质数定理表明从不大于n的自然数中随机选一个数，其为质数的**概率约为$1/\ln n$**
  - 质数的分布随着n的增大**逐渐稀疏**
  - 孪生质数猜想（twin prime conjecture, Hilbert 1900）：

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)=2$$



张益唐 与 孪生素数猜想

生于1955-

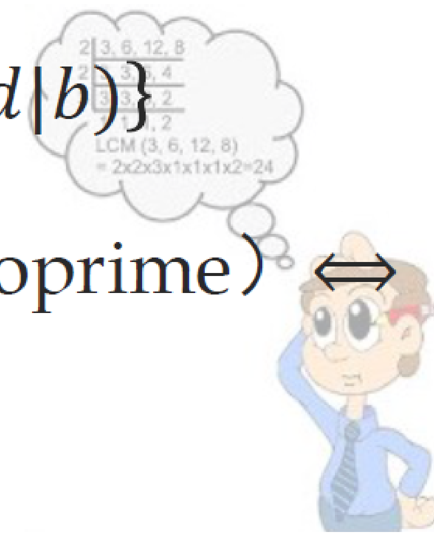
庾信平生最萧瑟，
暮年诗赋动江关

2013：$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) < 7\times 10^7$

最大公约数

- 设$a, b \in \mathbb{Z}^+$且$a \neq 0$或者$b \neq 0$，可同时整除a, b的最大正整数称为a与b的**最大公约数**（greatest common divisor, GCD），记为：

$$\gcd(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z}^+ | (d|a) \wedge (d|b)\}$$



- 称 $a, b \in \mathbb{Z}^+$**互质**（mutually prime, coprime）$\Leftrightarrow$ $\gcd(a, b) = 1$（常简记为$(a, b) = 1$）

最大公约数的性质

- 定理（线性合成）：设$a, b \in \mathbb{Z}^+$，则：

$$(\exists s, t \in \mathbb{Z})(\gcd(a, b) = sa + tb)$$

- 定理（辗转相减）：设$a, b \in \mathbb{Z}^+, a < b$，则：

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$$

- 定理（辗转相除）：设$a, b \in \mathbb{Z}^+, a > b$，则：

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

- If d is $GCD(a, b)$, then $d = sa + tb$ for some integer s and t.
  - Let x be the smallest positive integer that can be written as $sa + tb$. For any common divisor c of a, b, $c|(sa + tb)$, which means that x is no less than any common divisor of a, b.
  - Let $a = qx + r$ $(0 \leq r < x)$, then $r = a - q(sa + tb) = (1 - qs)a - qtb$. Since r is also of the form of $sa + tb$, r can not be positive, and must be 0. So, $a = qx$, that is, $x|a$. Similarly, $x|b$.
  - Conclusion: $x = sa + tb$ is the largest common divisor of a and b. And it is a multiple of any other common divisors.

求最大公约数的Euclid算法

function gcd(a, b) // a>0, b>0
  while $a \neq b$
    if a > b
      $a := a - b$
    else
      $b := b - a$
  return a

function gcd(a, b) // $a \geq b \geq 0$, a>0
  if b=0
    return a
  else
    return gcd(b, a **mod** b)

function gcd(a, b) // 非全0正整数
  while $b \neq 0$
    t := b
    b := a **mod** b
    a := t
  return a

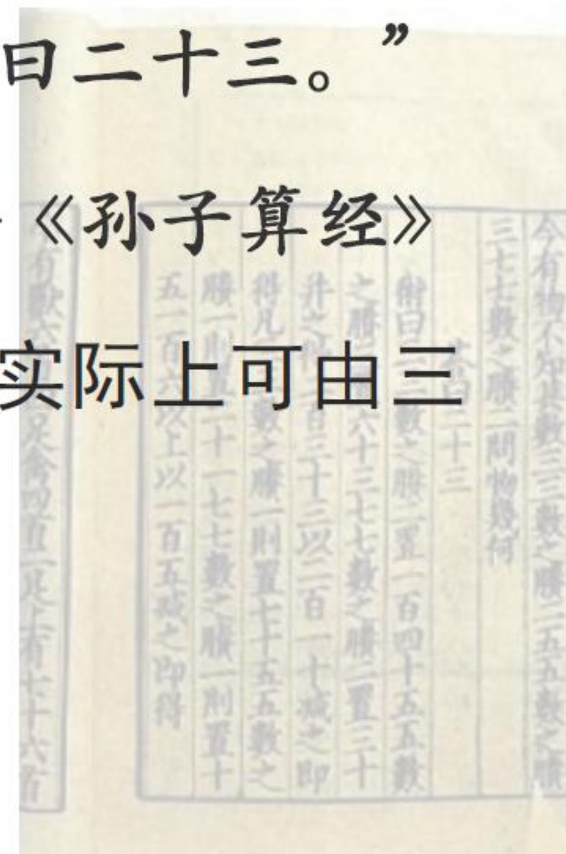
“欧几里得算法是所有算法的鼻祖，因为它是现存最古老的非凡算法。”

——高德纳，《计算机程序设计艺术，第二卷：半数值算法》，第二版（1981），p. 318.

中国剩余定理（孙子定理）

- “今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？答曰二十三。”

——《孙子算经》



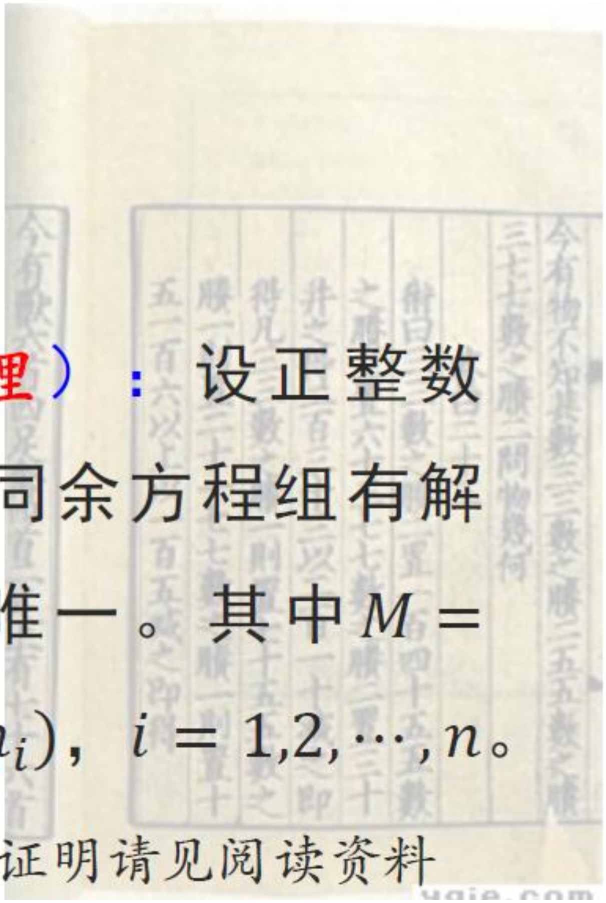
- 上述问题中的三个“x数之剩几”实际上可由三个线性同余方程描述：

$$
\begin{cases}
x \equiv 2 \pmod 3 \\
x \equiv 3 \pmod 5 \\
x \equiv 2 \pmod 7
\end{cases}
$$

中国剩余定理

- 一元线性同余方程组可写为：

$$
\begin{cases}
x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\
x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\
\qquad \vdots \\
x \equiv a_n \pmod{m_n}
\end{cases}
$$



- 定理（线性同余方程组的解存在定理）：设正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 两两互质，则一元线性同余方程组有解 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i M_i$，且解在模 M 同余下唯一。其中 $M = \prod_{i=1}^{n} m_i$，$M_i = M/m_i$，$t_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$，$i = 1,2,\cdots,n$。上述 t_i 称为 M_i 的“数论倒数”。该定理的证明请见阅读资料

欧拉函数

- 定义（欧拉函数）：对任意$n \in \mathbb{Z}^+$，

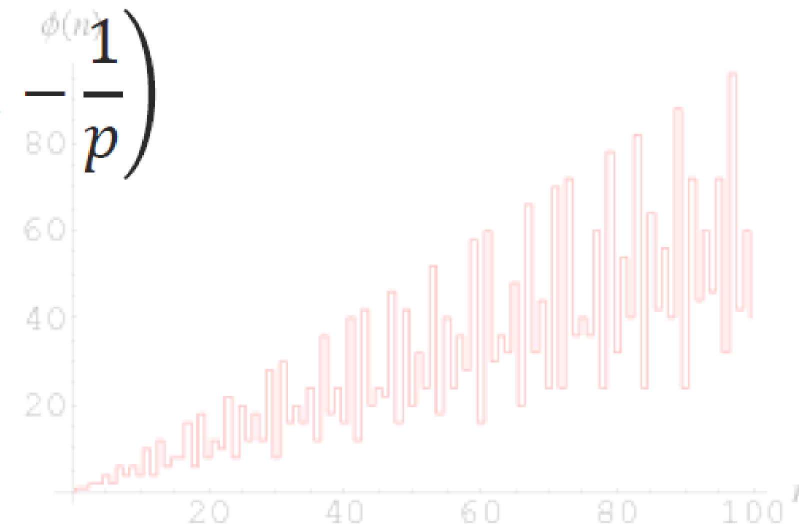
$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{Z}^+ | m \leq n \wedge (m,n) = 1\}|$$

- 例：$\varphi(3) = 2$，$\varphi(4) = 2$，$\varphi(12) = 4$
- 由容斥原理(未来课程详述)可证：

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

其中$\{p\}$为n的所有质因子

  - $(m,n) = 1 \rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$
  - p为质数$\rightarrow \varphi(p) = p - 1$



欧拉定理

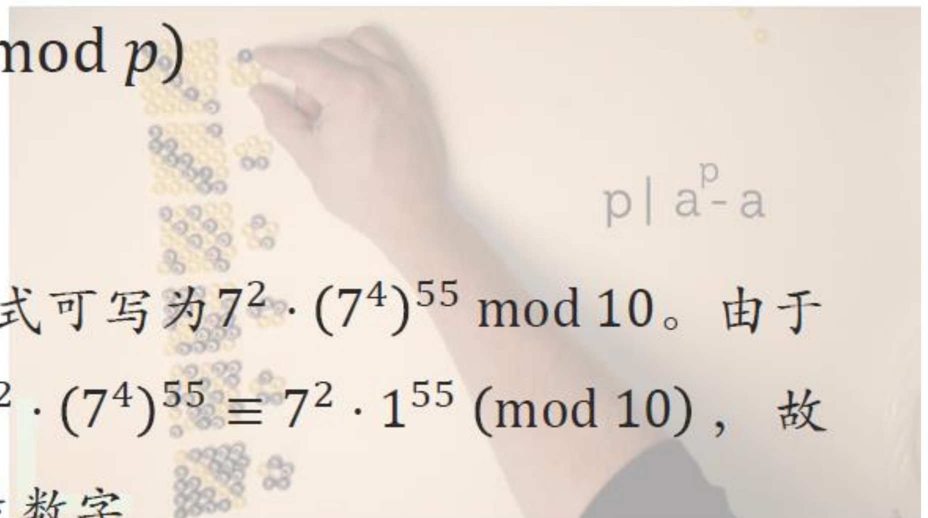
- 定理（**Euler定理**）：对$a, n \in \mathbb{Z}^+$，若$(a, n) = 1$，则：

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\text{mod } n)$$

- 若上述$n \in \mathbb{Z}^+$为质数，由欧拉函数的性质易得到：
- 定理（**Fermat小定理**）：设正整数a不是质数p之倍数，则：

$$a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$$

- 例：求7^{222}的个位数字
  - 解：待求即为$7^{222} \bmod 10$，上式可写为$7^2 \cdot (7^4)^{55} \bmod 10$。由于$(7,10) = 1$，由Euler定理，$7^2 \cdot (7^4)^{55} \equiv 7^2 \cdot 1^{55} \pmod{10}$，故$7^{222} \bmod 10 = 9$即为$7^{222}$之个位数字



作业

- 教材内容：[Rosen] 4.2—4.3节
- 课后习题：
  - 见课程网站