

离散数学作业 19—循环群与群同构

Problem 1

对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2 ，以及 $f: G_1 \rightarrow G_2$ ，说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 $f(G_1)$ 。

- (1) $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $G_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, 其中 \mathbb{R}^* 为非零实数集合， $+$ 和 \cdot 分别表示数的加法和乘法。

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

- (2) $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $G_2 = \langle A, \cdot \rangle$, 其中 $+$ 和 \cdot 分别表示数的加法和乘法, $A = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge |x| = 1\}$, 其中 \mathbb{C} 为复数集合。

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

Problem 2

证明循环群一定是阿贝尔群，说明阿贝尔群是否一定是循环群，并证明你的结论。

Problem 3

设 G_1 为循环群， f 是群 G_1 到 G_2 的同态，证明 $f(G_1)$ 也是循环群。

Problem 4

设 $G = \langle a \rangle$ 是15阶循环群。

(1) 求出 G 的所有生成元；

(2) 求出 G 的所有子群。

Problem 5

证明：三阶群必为循环群。

Problem 6

设群 $\langle G, * \rangle$ 除单位元外每个元素的阶均为2，则 $\langle G, * \rangle$ 是阿贝尔群。

Problem 7

设 G 为群，试证明： G 为阿贝尔群 $\Leftrightarrow \forall a, b \in G, (ab)^2 = a^2b^2$