离散数学作业 20–偏序格与代数格

Problem 1

图 1 给出了6个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。

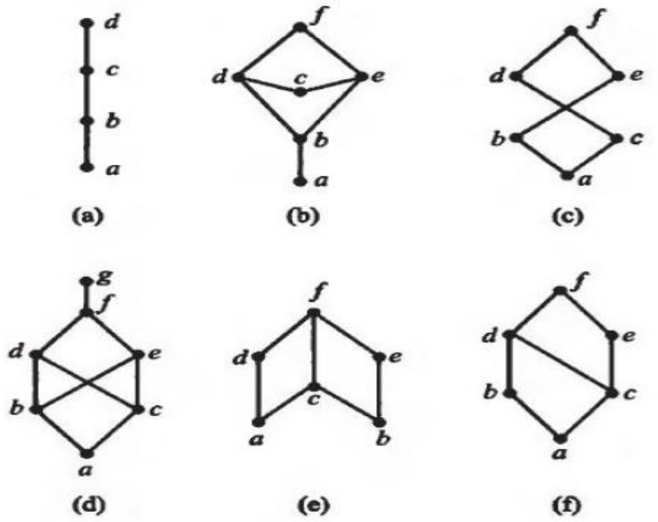


Figure 1: 图 1

Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

(1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(2) $L=\{1,2,3,6,12\}$;

(3) $L=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$;

(4) $L=\{1,2,2^2,\cdots,2^n,\cdots\}$.

Problem 3

设L是格，求以下公式的对偶式：

(1) $a\wedge(a\vee b)\preceq a$;

(2) $a\vee(b\wedge c)\preceq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

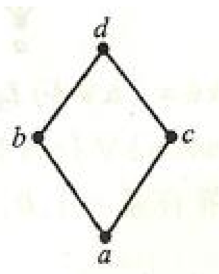
(3) $b\vee(c\wedge a)\preceq(b\vee c)\wedge a$.

Problem 4

设L是格，$a,b,c\in L$, 且$a\preceq b\preceq c$, 证明$a\vee b=b\wedge c$.

Problem 5

针对下图中的格L,求出L的所有子格。



Problem 6

设$< L, \preceq >$是格，任取$a \in L$，令$S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$, 证明$< S, \preceq >$是$L$的子格。

Problem 7

针对 **Problem 1** 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元。

Problem 8

说明 **Problem 1** 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由。

Problem 9

设$< L, \wedge, \vee, 0, 1 >$是有界格，证明$\forall a \in L$，有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

Problem 10

如果S是群G的子集，则S所生成的子群$\langle S \rangle$是包含所有S的元素的G的最小子群。这意味着它是包含S元素的所有子群的交集。等价的说$\langle S \rangle$是可以用S的元素和它们的逆元中的有限多个元素的乘积表达的G的所有元素的子群。设G是一个群,$L(G)$是G的所有子群的集合。在$L(G)$上定义偏序关系$\leq$为集合包含关系$\subseteq$。对于任意的$A, B \in L(G)$,定义$A \wedge B \overset{\text{def}}{=} \langle A \cap B \rangle$，$A \vee B \overset{\text{def}}{=} \langle A \cup B \rangle$，试证明：$\langle L(G), \vee, \wedge \rangle$是一个代数格，$\langle L(G), \leq \rangle$是一个偏序格，且二者同一。