

# 离散数学作业 21—布尔代数引论

## Problem 1

设 $B$ 是布尔代数,  $B$ 中的表达式  $f$  是  $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$ .

- (1) 化简 $f$ ;
- (2) 求 $f$ 的对偶式 $f^*$ .

## Problem 2

设 $B$ 是布尔代数,  $\forall a, b \in B$ , 证明:  $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$ .

## Problem 3

设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 在 $B$ 上定义二元运算 $\oplus$ ,  $\forall x, y \in B$ 有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

问 $\langle B, \oplus \rangle$ 能否构成代数系统? 如果能, 指出是哪一种代数系统. 为什么?

## Problem 4

设 $B$ 是布尔代数,  $\forall a, b, c \in B$ , 若 $a \preceq c$ , 则有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

称这个等式为模律，证明布尔代数适合模律。

## Problem 5

设 $B$ 是布尔代数,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$ , 证明:

$$(1) (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \dots \wedge a_n'$$

$$(2) (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \dots \vee a_n'$$

## Problem 6

设 $B$ 为布尔代数, 试证明:  $(\forall a, b \in B)(a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a')$ , 其中 $a'$ 表示 $a$ 的补元.

## Problem 7

设 $B_1, B_2, B_3$ 是布尔代数, 证明: 若 $B_1 \cong B_2, B_2 \cong B_3$ , 则 $B_1 \cong B_3$ .

## Problem 8

今有  $x, y, z$  三个布尔变元, 用  $xyz$  表示0-7之间的一个二进制数。定义布尔函数  $F$ : 当  $xyz$  是一个斐波那契数时  $F(x, y, z) = 1$ , 否则  $F(x, y, z) = 0$ 。

(1) 给出  $F$  的真值表。

(2) 以“布尔积之布尔和”的形式给出  $F$  的表达式 (无需化简)。

(3) 化简该表达式。