离散数学图论作业1 - 图的基本概念

Problem 1

假设有A、B、C、D、E共5名同学，每位同学都恰好"认识"除自己以外的3名同学。

a) 试用有向图表示上述5位同学之间的"认识"关系（给出一种即可）；

b) 能否用无向图表示这种"认识"关系？试说明理由。

Problem 2

证明或反驳：若无向图G至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则G不是简单图。

Problem 3

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

a) K_4

b) C_4

c) W_4

d) $K_{2,3}$

e) Q_3

Problem 4

判断下列度序列是否有对应的简单图。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

a) 5,4,3,2,1,0

b) 2,2,2,2,2,2

c) 5,4,2,1,1,1

d) 5,3,3,3,3,3

Problem 5

设无向图G有$\mathcal{V}$个点，$\mathcal{E}$条边，$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示G中度最小和度最大的点的度，证明$\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$。（其中$\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$称为图的**顶点平均度**）

Problem 6

令G是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳：

a) 删除G中一个度最大的点和相关的边，不会增加图的顶点平均度；

b) 删除G中一个度最小的点和相关的边，不会减少图的顶点平均度。

Problem 7

令G是一个顶点平均度为a的无环边的无向图。

a) 证明：G删去一个顶点x后平均度至少为a，当且仅当$deg(x) \leq \frac{a}{2}$；

b) 证明或反驳：如果$a > 0$，那么G有一个最小度大于$\frac{a}{2}$的子图。

Problem 8

简单图G的补图$\overline{G}$与G有相同的顶点。两个顶点在$\overline{G}$里相邻，当且仅当它们在G里不相邻。求下列图。

a) $\overline{K_n}$

b) $\overline{K_{m,n}}$

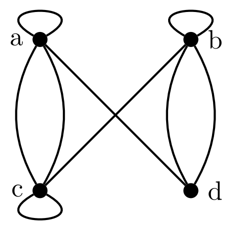
c) $\overline{C_n}$

d) $\overline{Q_n}$

离散数学图论作业 2 - 图的表示与图同构

Problem 1

用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Problem 2

1) 对下面两个简单图，先写出图的邻接矩阵 A，关联矩阵 B，然后计算矩阵 $D = BB^{\mathrm{T}} - A$。

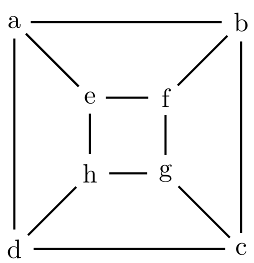
a) $K_{3,2}$

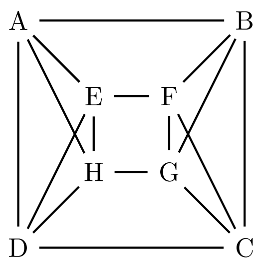
b) $K_2 \cup K_3$

2) D 与原来的图什么关系？试解释其原因。（该问不计分数，自由选做）

Problem 3

证明 [下左图] 和 [下右图的补图] 同构。





Problem 4

证明：对于任意的图 G 和 H，$G \cong H$ 当且仅当 $\bar{G} \cong \bar{H}$。

Problem 5

若简单图 G 与 $\bar{G}$ 是同构的，则 G 称为**自补图**

试证明：若正则图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 $\mathcal{V}$ 满足 $\mathcal{V} \equiv 1\,(mod 4)$。

Problem 6

给出两个不同构但具有相同度序列的图。（考虑图论 1、2 两次作业平均题数是 7，给出的图顶点数不要超过 7）