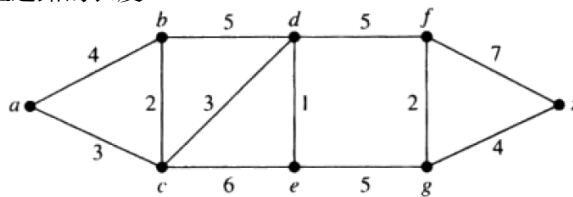


# 离散数学图论作业 6 - 最短通路

## Problem 1

求下图中下列成对顶点之间的最短通路的长度。

- a)  $a$  和  $d$
- b)  $a$  和  $f$
- c)  $z$  和  $f$
- d)  $b$  和  $z$



## Problem 2

---

### Algorithm 1 弗洛伊德算法

---

**procedure** FLOYD( $G$ : 带权简单图)

{ $G$  有顶点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  和权  $w(v_i, v_j)$ , 其中若  $(v_i, v_j)$  不是边, 则  $w(v_i, v_j) = \infty$ }

**for**  $i := 1$  **to**  $n$

**for**  $j := 1$  **to**  $n$

$d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$

**for**  $i := 1$  **to**  $n$

**for**  $j := 1$  **to**  $n$

**for**  $k := 1$  **to**  $n$

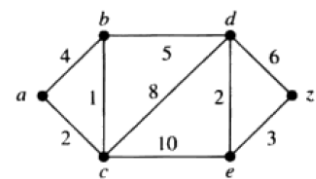
**if**  $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$  **then**

$d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$

{ $d(v_i, v_j)$  是在  $v_i$  与  $v_j$  之间的最短通路的长度}

---

- a) 用弗洛伊德算法求右图中带权图里所有顶点对之间的距离。
- b) 证明：弗洛伊德算法确定出带权简单图里所有顶点对之间的最短距离。



## Problem 3

下面是 *Dijkstra* 算法的一个实现，它求出了从  $a$  出发到  $z$  所有边权的和最小的通路的长度，请尝试修改该算法中相应的行，解决下列问题：

---

### Algorithm 2 Dijkstra 算法

---

```
procedure DIJKSTRA( $G$ : 所有权都为正数的带权连通简单图)
{ $G$  有顶点  $a = v_1, v_2, \dots, z = v_n$  和权  $w(v_i, v_j)$ , 其中若  $(v_i, v_j)$  不是  $G$  的边, 则  $w(v_i, v_j) = \infty$ }
  for  $i := 1$  to  $n$ 
     $L(v_i) := \infty$ 
   $L(a) := 0$ 
   $S := \emptyset$ 
  while  $z \notin S$ 
     $u :=$  不属于  $S$  的  $L(u)$  最小的一个顶点
     $S := S \cup \{u\}$ 
    for 所有不属于  $S$  的顶点  $v$ 
       $L(v) := \min\{L(v), L(u) + w(u, v)\}$ 
      {向  $S$  中添加带最小标记的顶点, 并且更新不在  $S$  中的顶点的标记}
  return  $L(z)$  { $L(z) =$  从  $a$  到  $z$  的最短通路的长度}
```

---

- a) 对于任意边权大于 1 的图  $G$ , 对于给出的点  $a, z$ , 试求  $a$  到  $z$  的通路所有边的权值乘积最小可以是多少; (无需证明, 下同)
- b) 对于任意边权非负的图  $G$ , 对于给出的点  $a, z$ , 试求  $a$  到  $z$  的任意通路上最短的边最长可以有多长。

## Problem 4

若边的权可以为负数, *Dijkstra* 算法能否正确求出最短路? 若可以, 请给出证明; 若不能, 请举出一个反例并分析说明。

## Problem 5

证明或反驳: 对于权值为正的简单连通图  $G$ , 在已知图上任意两点间最短路长度的前提下, 可以构建出  $G$ 。