

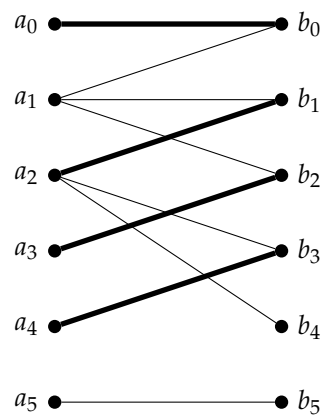
离散数学图论作业7 - 二部图匹配

Problem 1

证明：一个无回路的简单连通图最多只有一个完美匹配。（完美匹配指能饱和所有顶点的匹配）

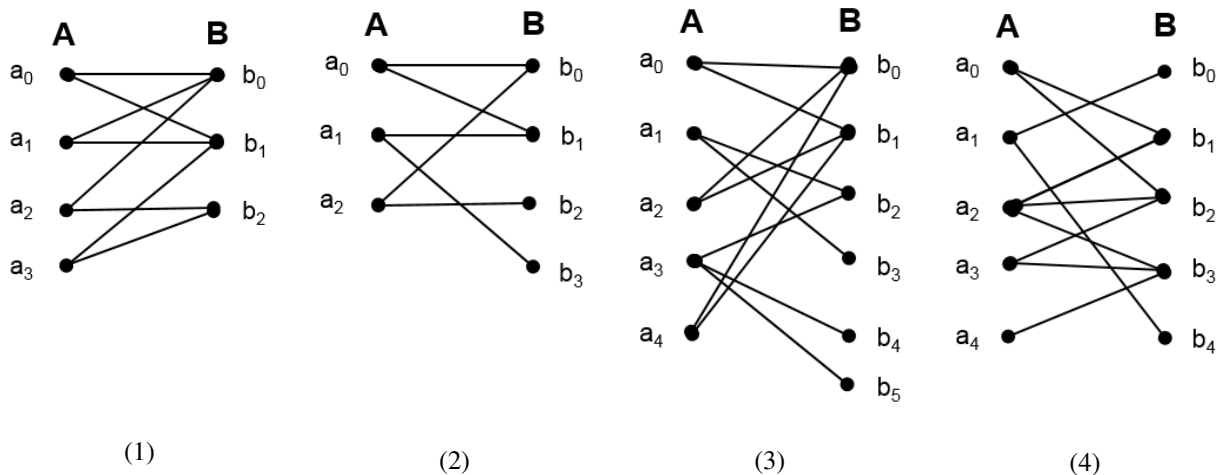
Problem 2

从下图 $G = (A, B, E)$ 中，找出相对于匹配 M (粗边的集合)的任意三条交错路径(alternating path)和两条增广路径(augmenting path)，然后利用找出的增广路径扩大 M 。



Problem 3

对于每一个二部图 $G = (A, B, E)$ ，判断 G 是否有饱和 A 的匹配。如果没有，请说明理由。



Problem 4

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的 k 划分指划分为大小相同的互不想交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的代表集指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的一个2划分为 $A : \{1, 2\} \{3, 4\}$ 。此划分的代表集有 $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ ，但 $\{1, 2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B : \{2, 3\} \{1, 4\}$ 。易见， A 与 B 存在相同的代表集 $\{1, 3\}$ 。

Problem 5

对于哪些 n 值来说，下列图是存在完美匹配的二分图？

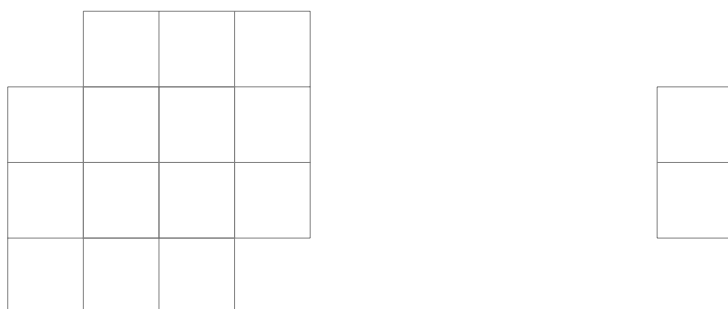
- K_n
- C_n
- Q_n

Problem 6

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，恰好有 k 名感兴趣的导师；对于每一位导师，恰好有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导1名学生，且每位学生也只能选择1名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

Problem 7

证明一个 4×4 的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干 1×2 的小矩形。



Problem 8

考虑 $N \times M$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G 。当 N 和 M 都是大于1的奇数时，给出一种哈密顿回路的构造方法，或证明此时 G 没有哈密顿回路。【提示：考虑二部图的性质】