

离散数学图论作业 1 - 图的基本概念

如无特殊说明，所有作业题只考虑有限个顶点的图

Problem 1

假设有 A、B、C、D、E 共 5 名同学，每位同学都恰好“认识”除自己以外的 3 名同学。

- a) 试用有向图表示上述 5 位同学之间的“认识”关系（给出一种即可）；
- b) 能否用无向图表示这种“认识”关系？试说明理由。

Problem 2

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

Problem 3

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列。

- a) K_5
- b) C_3
- c) W_4
- d) $K_{2,3}$
- e) Q_3

Problem 4

判断下列度序列是否有对应的简单图。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

- a) 5,4,3,2,1,0

- b) 2,2,2,2,2
- c) 5,4,2,1,1,1
- d) 5,3,3,3,3,3

Problem 5

设无向图 G 有 \mathcal{V} 个点, \mathcal{E} 条边, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的点的度, 证明 $\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$ 。
(其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的顶点平均度)

Problem 6

令 G 是至少有两个顶点的无向图, 证明或反驳:

- a) 删除 G 中一个度最大的点和相关的边, 不会增加图的顶点平均度;
- b) 删除 G 中一个度最小的点和相关的边, 不会减少图的顶点平均度。

Problem 7

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无环边的无向图。

- a) 证明: G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a , 当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$;
- b) 证明或反驳: 如果 $a > 0$, 那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

Problem 8

简单图 G 的补图 \bar{G} 与 G 有相同的顶点。两个顶点在 \bar{G} 里相邻, 当且仅当它们在 G 里不相邻。
证明: 只有有限个 G 满足 G 与 \bar{G} 均是二部图。(提示, 考虑 G 的顶点数上限)