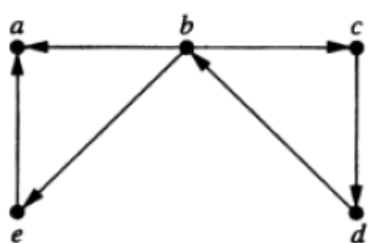


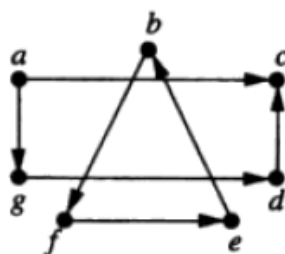
离散数学图论作业 3 - 图的连通性

Problem 1

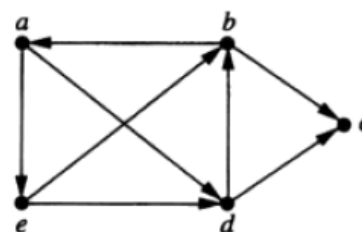
判断下列各图是否是强连通的，如果不是，再判断是否是弱连通的。



(1)



(2)



(3)

Problem 2

证明：简单图 G 是二部图 (bipartite graph)，当且仅当 G 没有包含奇数条边的回路。

Problem 3

- a) 证明或反驳：存在函数 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ 使得对于所有 $k \in \mathbf{N}$ ，最小度至少为 $f(k)$ 的图一定是 k -连通的。
- b) 证明或反驳：存在函数 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ 使得对于所有 $k \in \mathbf{N}$ ，边连通度至少为 $f(k)$ 的图一定是 k -连通的。

Problem 4

证明： $\kappa(G) = 1$ 的 r -正则图 G ，若 $r > 1$ ，总满足 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$ 。（ $\lambda(G)$ 表示 G 的边连通度）

Problem 5

证明： G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。
(提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异)

Problem 6

证明：若 G 是 k -边连通图，从 G 中任意删除 k 条边，最多得到 2 个连通分支。

Problem 7

对于任意的简单连通图 G ,

1. 证明 $V(G) = E(G)$ 时， G 中有且仅有 1 个简单回路。(可直接使用 $V(G) = E(G) - 1$ 时图 G 中无简单回路的结论)
2. 该结论能否推广为 $E(G) \geq V(G)$ 时 G 中有且仅有 $E(G) - V(G) + 1$ 个简单回路?

* 题中简单回路不存在重复的边，可能存在大于 1 个重复顶点 (见 P573 定义 1)

Problem 8

证明：若简单图 G 是不连通的，则 G 的补图是连通图。

Problem 9

证明：任意简单连通图 G 包含一条长度至少为 $\min\{2\delta(G), |V(G)| - 1\}$ 的顶点和边均不重复的通路。
(提示：证明过程中可以考虑图 G 中最长的 [顶点和边均不重复的] 通路)