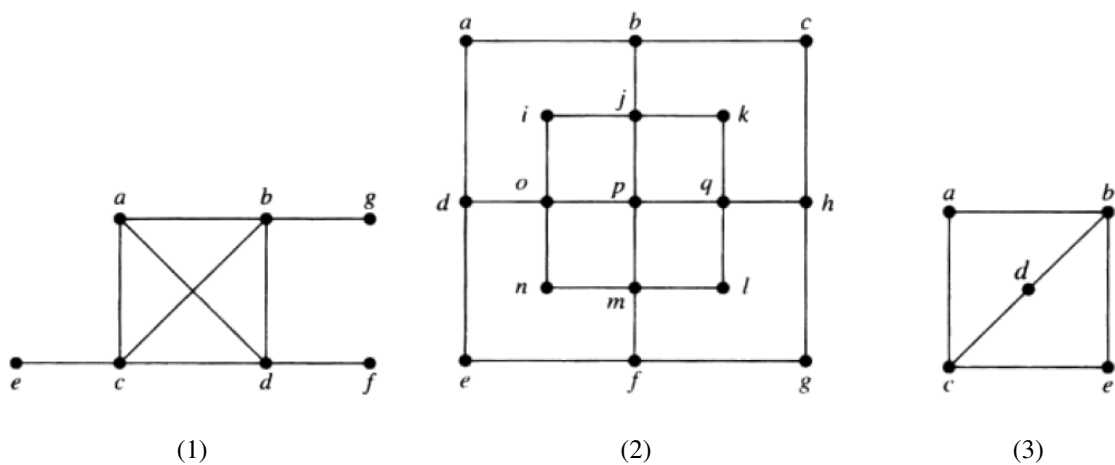


离散数学图论作业 5 - 哈密顿图

Problem 1

下方所示各图是否拥有哈密顿通路？若有哈密顿通路，则求出这样一条通路。若没有哈密顿通路，则论证为什么这样的通路不存在。



Problem 2

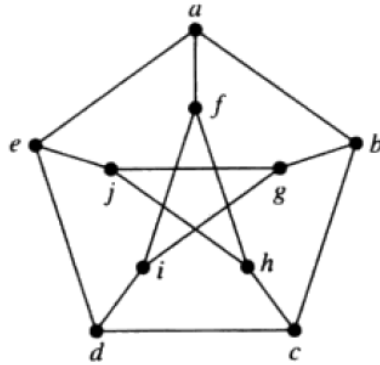
对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密顿回路？

Problem 3

证明：每当 n 是正整数时，就存在 n 阶格雷码，或者等价地证明： $n > 1$ 的 n 维立方体 (n -cube) Q ，总是具有哈密顿回路。[提示：用数学归纳法，证明如何从 $n - 1$ 阶格雷码产生 n 阶格雷码。]

Problem 4

证明：下图所示的彼得森图没有哈密顿回路，但删除任意顶点 v 和所有与 v 关联的边，所获得的子图都有哈密顿回路。



Problem 5

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$ ，证明或反驳：

- G 一定存在哈密顿回路。
- G 一定存在哈密顿通路。

Problem 6

底图是完全图的有向图称为竞赛图，试证明：

- 竞赛图一定含有哈密顿通路。
- 竞赛图含有哈密顿回路的充分必要条件是强连通。

Problem 7

考虑在 15 天安排 15 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 8 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

Problem 8

考虑 $M \times N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G 。

- a) 当 N 是偶数且 $M > 1$ 时，给出一种哈密顿回路的构造方法。
- b) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密顿回路。