离散数学图论作业 6 - 最短通路

Problem 1

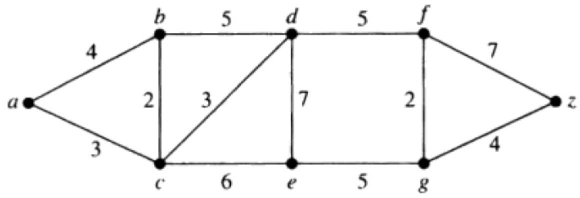
求下图中下列成对顶点之间的最短通路的长度。

a) a 和 d

b) a 和 f

c) c 和 f

d) b 和 z



Problem 2

Algorithm 1 弗洛伊德算法

procedure FLOYD(G: 带权简单图)

$\{G$ 有顶点 $v_1, v_2, ..., v_n$ 和权 $w(v_i, v_j)$，其中若 (v_i, v_j) 不是边，则 $w(v_i, v_j) = \infty\}$

  for $i := 1$ **to** n

    for $j := 1$ **to** n

      $d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$

  for $i := 1$ **to** n

    for $j := 1$ **to** n

      for $k := 1$ **to** n

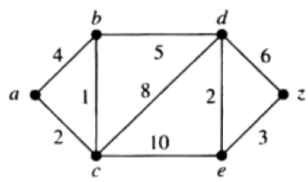
        if $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$ **then**

          $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$

$\{d(v_i, v_j)$ 是在 v_i 与 v_j 之间的最短通路的长度$\}$

a) 用弗洛伊德算法求右图中带权图里所有顶点对之间的距离。

b) 证明：当 $Floyd$ 最外层的循环执行完 $i = p$ 时，$d(v_j, v_k)$ 表示从 v_j 到 v_k 且路径上中间顶点都在集合 $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ 中的路径的最短距离。



Problem 3

下面是 $Dijkstra$ 算法的一个实现，它求出了从 a 出发到 z 所有边权的和最小的通路的长度，请尝试修改该算法中相应的行，解决下列问题：

Algorithm 2 Dijkstra 算法

```
procedure DIJKSTRA(G: 所有权都为正数的带权连通简单图)
{G 有顶点 a = v_1, v_2, ..., z = v_n 和权 w(v_i, v_j)，其中若 (v_i, v_j) 不是 G 的边，则 w(v_i, v_j) = ∞}
    for  i := 1 to n
        L(v_i) := ∞
    L(a) := 0
    S := ∅
    while  z ∉ S
        u := 不属于 S 的 L(u) 最小的一个顶点
        S := S ∪ {u}
        for 所有不属于 S 的顶点 v
            L(v) := min{L(v), L(u) + w(u, v)}
    {向 S 中添加带最小标记的顶点，并且更新不在 S 中的顶点的标记}
return L(z) {L(z) = 从 a 到 z 的最短通路的长度}
```

a) 对于任意边权大于 1 的图 G，对于给出的点 a, z，试求 a 到 z 的通路上所有边的权值乘积最小可以是多少；（无需证明，下同）

b) 对于任意边权非负的图 G，对于给出的点 a, z，试求 a 到 z 的任意通路上最短的边最长可以有多长。

Problem 4

若边的权可以为负数，$Dijkstra$ 算法能否正确求出最短路？若可以，请给出证明；若不能，请举出一个反例并分析说明。

Problem 5

证明或反驳：对于权值为正的简单连通图 G，在已知图上任意两点间最短路长度的前提下，可以构建出 G。

Problem 6

利用已有最短路算法，解决下列求简单加权（权均为正数）连通图上的最短通路长度的问题：

a) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j，且经过顶点 v_k 的最短通路长度（为保证通路最短，可以经过同一个顶点多次）；

b) 求从顶点 v_i 出发到达 v_j，且不经过顶点 v_k 的最短通路长度；

c) 求从顶点 v_i 出发，先经过顶点 v_k，再到达顶点 v_j 的最短通路长度（即在到达 v_k 前不得经过顶点 v_j）；

Problem 7

通过下列两种方法来解决下图的旅行商问题。

a) 求出所有哈密顿回路的总权数并且确定出总权数最小的回路；

b) 采用最邻近算法，以顶点 b 为始点找到近似最短的哈密尔顿回路；