

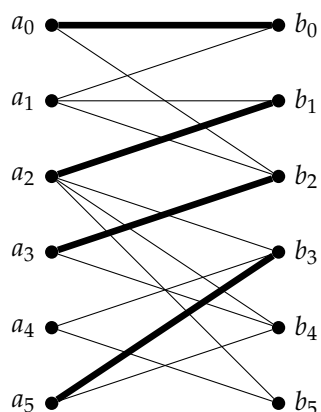
离散数学图论作业 7 - 二部图匹配

Problem 1

证明：一个无回路的简单连通图最多只有一个完美匹配。(完美匹配指能饱和所有顶点的匹配)

Problem 2

从下图 $G = (A, B, E)$ 中，找出相对于匹配 M (粗边的集合) 的任意三条交错路径 (alternating path) 和至少两条增广路径 (augmenting path)，然后利用增广路径扩大 M 来找到最大匹配。



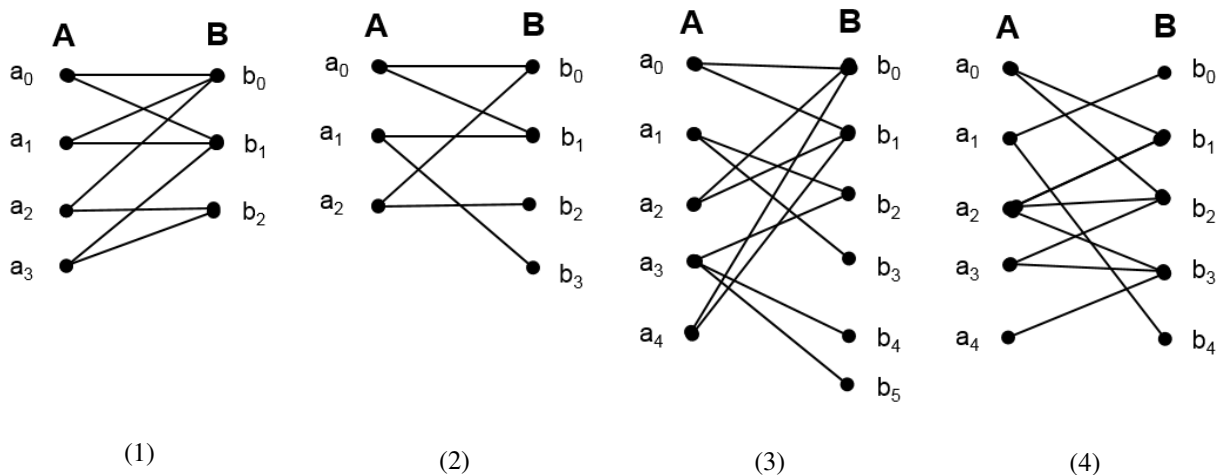
Problem 3

对于哪些 n 值来说，下列图是存在完美匹配的二部图？

- a) K_n
- b) C_n
- c) Q_n

Problem 4

对于每一个二部图 $G = (A, B, E)$ ，判断 G 是否有饱和 A 的匹配。如果没有，请说明理由。



Problem 5

令 k 为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个 k 划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的 k 划分指划分为大小相同的互不想交的 k 个子集，为简便起见，设集合的大小为 k 的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的代表集指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的一个 2 划分为 $A: \{1, 2\}, \{3, 4\}$ 。此划分的代表集有 $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ ，但 $\{1, 2\}$ 不是其代表集。集合的另外一个划分为 $B: \{2, 3\}, \{1, 4\}$ 。易见， A 与 B 存在相同的代表集 $\{1, 3\}$ 。

Problem 6

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对 k 名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

Problem 7

证明一个 6×6 的方格纸板挖去左上角和右下角后不能用剪刀裁剪成若干 1×2 的小矩形。

