

# 离散数学作业 10-递归与结构归纳法

## 习题 1

给出下述集合的递归定义：

- a) 正偶数集合。
- b) 3 的正整数次幂的集合。
- c) 整系数多项式的集合。

## 习题 2

确定用欧几里得算法求出斐波那契数  $f_n$  和  $f_{n+1}$  的最大公因子所用的除法的次数，其中  $n$  是非负整数。用数学归纳法验证你的答案。

## 习题 3

- a) 对于表示十进制数字的非空字符串  $s$ ，给出计算  $s$  中最小数字的函数  $m(s)$  的递归定义。
- b) 用结构归纳法证明  $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$ 。(其中  $s \cdot t$  表示位串  $s$  和位串  $t$  的连接)

## 习题 4

正整数  $n$  的分拆是把  $n$  写成正整数之和的方式。例如,  $7 = 3 + 2 + 1 + 1$  是 7 的分拆。设  $P_m$  等于  $m$  的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设  $P_{m,n}$  是用不超过  $n$  的正整数之和来表示  $m$  的不同方式数。

a) 证明:  $P_{m,m} = P_m$ 。

b) 证明: 下面的  $P_{m,n}$  的递归定义是正确的。

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 1 & n = 1 \\ P_{m,m} & m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & m > n > 1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

## 习题 5

求出阿克曼函数值  $A(3, 4)$ 。阿克曼函数的定义为:

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m - 1, 1) & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

## 习题 6

证明: 对第  $n$  个斐波那契数  $f_n$ , 当  $n$  是正整数时, 有  $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ 。

## 习题 7

斐波那契树  $T_k$  是一种特殊的二叉树并满足以下定义:

a)  $T_1$  和  $T_2$  是只有一个顶点的二叉树。

b) 对于任意的  $n > 2$ ,  $T_n$  由一个根节点和左子树  $T_{n-1}$  和右子树  $T_{n-2}$  组成。

使用结构归纳证明：对于任意大于 1 的整数  $n$ ,  $T_n$  的高度为  $n - 2$ 。

## 习题 8

给出字符串的倒置的递归定义。(一个字符串的倒置(反转),是由原字符串里的符号以相反顺序组成的字符串。把字符串  $w$  的倒置表示为  $w^R$ 。)