

作业11-基础计数技术

习题 1

长度为 n ($n > 5$)且以000开始或以111结尾的二进制串有多少个?

习题 2

长度为12且不包含“11”子串的二进制串有多少个?

习题 3

多少个串有4个十进制数且

- a) 同一数字不出现两次?
- b) 恰有3个数字是9?
- c) 以偶数字结束?

习题 4

在1000到9999之间包含多少个正整数

- a) 被9整除?
- e) 有不同的十进制数字?
- c) 是偶数?
- g) 不被3整除?

b) 被5或7整除?

f) 被5整除但不被7整除?

d) 不被5也不被7整除?

h) 被5和7整除?

习题 5

证明: 如果 f 是从 S 到 T 的函数,其中 S 和 T 是有穷集, 满足 $|S| > |T|$, 那么在 S 中存在元素 s_1 和 s_2 使得 $f(s_1) = f(s_2)$, 或者换句话说, f 不是一一对应的。

习题 6

证明, 如果在边长为1的正方形内放5个点, 那么总是可以找到两个距离不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点。可以用一个更小的数值来代替 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 吗?

习题 7

证明25个女孩和25个男孩围坐一个圆桌旁边总会有一个人的邻座都是男孩。

习题 8

如果有8种不同的课程可供选择, 每个学生必须选择5门课程来完成他/她的学习计划。那么最少有多少名学生, 使得不管他们如何选择, 至少有10名学生的学习计划相同?

习题 9

一个关于270个大学生的调查显示: 64人喜欢芽甘蓝, 94人喜欢椰菜, 58人喜欢花椰菜, 26人喜欢芽甘蓝和椰菜, 28人喜欢芽甘蓝和花椰菜, 22人喜

欢椰菜和花椰菜，14 人喜欢这3种蔬菜。270个学生中有多少人在这3 蔬菜都不喜欢？

习题 10

有6个集合，如果知道其中任3个集合都是不相交的，根据容斥原理写出关于这6个集合并集元素个数的显式公式。

习题 11

使用数学归纳法证明容斥原理。

习题 12

1000个人申请喜马拉雅山旅游，450人有高山病，622人不是处在很好的状态，30人有过敏症。一个申请人当且仅当没有高山病，是在一个良好的状态下，并且没有过敏症，才算合格。如果111个申请人有高山病并且不是在良好状态，14人有高山病和过敏症，18人不是在良好的状态并且有过敏症。9个人有高山病并且不是在良好状态和有过敏症。那么有多少申请人合格？

习题 13

证明：在任一组10个人中（其中任两个人或者是朋友或者是敌人）或存在3个人彼此都是朋友，或存在4个人彼此都是敌人；并且存在3个人彼此是敌人，或存在4个人彼此是朋友。