

离散数学作业 Problem set 14

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$, 判断以下结论是否正确, 并简述理由:

a) $\emptyset \subseteq A \times A$

c) $\{a, c\} \in A$

b) $\{a, b\} \in A \times A$

d) $(a, b) \in A \times A$

Problem 2

证明 $A \times B \neq B \times A$ 除非 $A = B$, 其中 A 和 B 均为非空集合.

Problem 3

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系。从集合 B 到集合 A 的逆关系, 记作 R^{-1} , 是有序对 $\{(b, a) | (a, b) \in R\}$ 的集合, 补关系 \bar{R} 是有序对 $\{(a, b) | (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$ 的集合。

设 R 是正整数集合上的关系, 且 $R = \{(a, b) | a \text{ 整除 } b\}$, 求:

a) R^{-1}

b) \bar{R}

Problem 4

设 R 是关系 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$, S 是关系 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, 求 $S \circ R$

Problem 5

设 R 是定义在具有博士学位的人集合上的关系, $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 是 b 的论文导师. 那么请说明什么情况下一个有序对 (a, b) 在 R^2 中? 什么情况下一个有序对 (a, b) 在 R^n 中? 这里 n 是正整数. (注意每个具有博士学位的人都有一个论文导师.)

Problem 6

设 R_1 和 R_2 分别是整数集合上的“模 3 同余”和“模 4 同余”关系, 即 $R_1 = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{3}\}$ 和 $R_2 = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{4}\}$, 求:

a) $R_1 \cup R_2$

b) $R_1 \cap R_2$

c) $R_1 - R_2$

d) $R_2 - R_1$

e) $R_1 \oplus R_2$

Problem 7

a) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个不同的关系?

b) 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个关系包含有序对 (a, a) ?

Problem 8

设 S 是 n 个元素的集合, a 和 b 是 S 中的不同元素. 那么 S 中有多少个关系使得:

- a) (a, b) 属于这个关系.
- b) (a, b) 不属于这个关系.
- c) 在关系中没有有序对使得 a 作为关系的元素.
- d) 在关系中至少有一个有序对以 a 作为第一元素.
- e) 在关系中没有有序对以 a 作为它的第一元素, 也没有有序对以 b 作为它的第二元素.
- f) 在关系中至少有一个有序对以 a 作为它的第一元素, 或者以 b 作为它的第二元素.

Problem 9

设关系 R 是由人的集合上的有序对 (a, b) 组成的集合, 其中 a 是 b 的父母. 设关系 S 是由人的集合上的有序对 (a, b) 组成的集合, 其中 a 是 b 的亲兄弟姐妹. 那么请问 $R \circ S$ 和 $S \circ R$ 分别是什么, 他们有什么样的关系, 为什么?