离散数学作业 Problem Set 15

Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系 R 是否是自反的、对称的、反对称的和传递的, 其中 $(a,b) \in R$ 当且仅当

a) a 比 b 高

b) a 和 b 生在同一天

c) a 和 b 同名

d) a 和 b 有共同的祖父母

Problem 2

找出下面定理证明中的错误。

"定理"：设 R 是集合 A 上的对称的和传递的关系，则 R 是自反的。

"证明"：设 $a \in A$。取元素 $b \in A$ 使得 $(a,b) \in R$。由于 R 是对称的，所以有 $(b,a) \in R$。现在使用传递性，由 $(a,b) \in R$ 和 $(b,a) \in R$ 可以得出 $(a,a) \in R$。

Problem 3

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系。从集合 B 到集合 A 的**逆关系**，记作 R^{-1}，是有序对 $\{(b,a)|(a,b)\in R\}$ 的集合，**补关系** $\bar{x}$ 是有序对 $\{(a,b)|(a,b)\notin R\}$ 的集合。

证明：集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的。

Problem 4

设 R 是集合 A 上的自反关系，证明对所有正整数 n，R^n 也是自反的。

Problem 5

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系，由以下矩阵表示。

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},M_{R_2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵。

a)$R_1\cup R_2$　　b)$R_1\cap R_2$　　c)$R_2\circ R_1$

d)$R_1\circ R_1$　　e)$R_1\oplus R_2$

Problem 6

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系的传递闭包

a) $\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$

b) $\{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$

c) $\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$

d) $\{(a,e),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$

Problem 7

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系，$((a,b),(c,d)) \in R$ 当且仅当 $a+d=b+c$。证明 R 是等价关系。

Problem 8

设 A 为所有长度至少为 3 的二进制串的集合，定义 A 上的二元关系 $R: xRy$ 表示串 x 与串 y 的前三位相同。证明 R 为等价关系。

Problem 9

证明：一个关系的对称闭包的自反闭包和它的自反闭包的对称闭包是相同的。

Problem 10

n 元素集合上有多少个关系是:

a) 对称的?

b) 反对称的?

c) 非对称的?

d) 反自反的?

e) 自反的和对称的?

f) 既不是自反的也不是反自反的?

Problem 11

证明如下命题:

a) 一个关系的对称闭包的自反闭包和它的自反闭包的对称闭包是相同的.

b) 一个关系的对称闭包的传递闭包一定包含这个关系的传递闭包的对称闭包.

Problem 12

假设 R_1 和 R_2 是集合 S(不为空集) 上的等价关系，判断下面 R_1 和 R_2 的每个组合是否一定为等价关系:

a) $R_1 \cup R_2$

b) $R_1 \cap R_2$

c) $R_1 \oplus R_2$

Problem 13

判断并说明理由：当我们构造一个关系的传递闭包的自反闭包的对称闭包时，一定能得到一个等价关系吗？