

离散数学作业Problem set 19

Problem 1

群 $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ 的下列子集是否构成群 G 的子群?

(1) $\{1, -1\}$ (2) $\{i, -i\}$ (3) $\{1, i\}$ (4) $\{1, -i\}$.

Problem 2

设 G 为群, a 是 G 中给定元素, a 的正规化子 $N(a)$ 表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合, 即 $N(a) = \{x|x \in G \wedge xa = ax\}$. 证明: $N(a)$ 是 G 的子群.

Problem 3

设 H 是群 G 的子群, $x \in G$, 令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1}|h \in H\}$, 证明 xHx^{-1} 是 G 的子群, 称为 H 的共轭子群.

Problem 4

设 H 和 K 分别为群 G 的 r, s 阶子群, 若 r 与 s 互素, 证明 $H \cap K = \{e\}$.

Problem 5

证明：若 G 中只有一个2阶元，则这个2阶元一定与 G 中所有元素可交换。

Problem 6

设 aH 和 bH 是子群 H 在群 G 中的两个左陪集，证明：要么 $aH \cap bH = \emptyset$ ，要么 $aH = bH$ 。

Problem 7

设 G 是一个群， H_1, H_2 都是 G 的子群。假设 $H_1 \not\subseteq H_2$ ，且 $H_2 \not\subseteq H_1$ 。证明： $H_1 \cup H_2$ 不是 G 的子群。

Problem 8

设 $a \in G$ ， $C(a)$ 在 G 中的中心化子(centralizer)为

$$C(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$$

证明： $C(a)$ 是 G 的子群。

Problem 9

设 H, K 是群 G 的两个子群。证明：当且仅当 $H \subseteq K$ 或者 $K \subseteq H$ 时， $H \cup K$ 是 G 的子群。利用此结论证明：a) 群 G 不能被它的两个真子群所覆盖（即对所有真子集的元素取并后可以得到群 G 中的所有元素）。b) 群 G 能被它的三个真子群覆盖吗？