

离散数学作业 Problem set 21

Problem 1

图 1 给出了6个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。

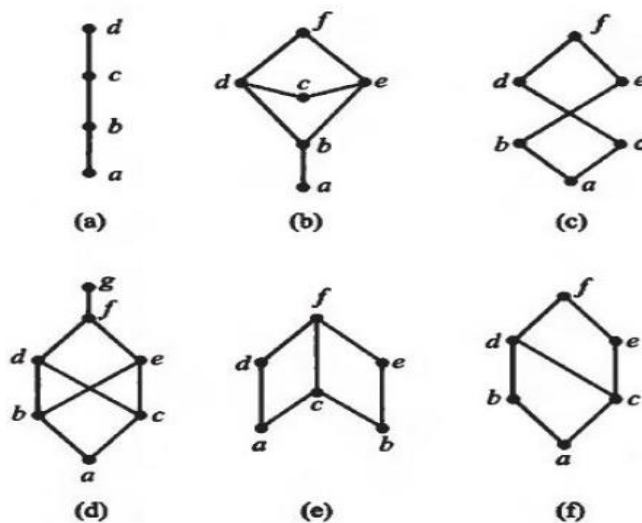


Figure 1: 图 1

Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格。

(1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(2) $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$;

(3) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;

(4) $L = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}$.

Problem 3

设 L 是格，求以下公式的对偶式：

(1) $a \wedge (a \vee b) \preceq a$;

(2) $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

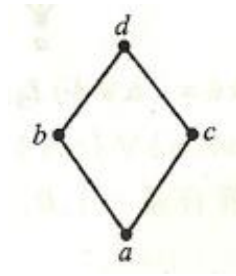
(3) $b \vee (c \wedge a) \preceq (b \vee c) \wedge a$.

Problem 4

设 L 是格， $a, b, c \in L$ ，且 $a \preceq b \preceq c$ ，证明 $a \vee b = b \wedge c$ 。

Problem 5

针对下图中的格 L ，求出 L 的所有子格。



Problem 6

设 $\langle L, \preceq \rangle$ 是格，任取 $a \in L$ ，令 $S = \{x \mid x \in L \wedge x \preceq a\}$ ，证明 $\langle S, \preceq \rangle$ 是 L 的子格。

Problem 7

证明：一个格的每一个有限非空子集有最小上界和最大下界。

Problem 8

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格，证明 $\forall a \in L$ ，有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

Problem 9

如果 S 是群 G 的子集，则 S 所生成的子群 $\langle S \rangle$ 是包含所有 S 的元素的 G 的最小子群。这意味着它是包含 S 元素的所有子群的交集。等价的说 $\langle S \rangle$ 是可以由 S 的元素和它们的逆元中的有限多个元素的乘积表达的 G 的所有元素的子群。设 G 是一个群， $L(G)$ 是 G 的所有子群的集合。在 $L(G)$ 上定义偏序关系 \leq 为集合包含关系 \subseteq 。

对于任意的 $A, B \in L(G)$, 定义 $A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \langle A \cap B \rangle$, $A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} \langle A \cup B \rangle$, 试证明:
 $\langle L(G), \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数格, $\langle L(G), \leq \rangle$ 是一个偏序格, 且二者同一。