

## 离散数学作业 22—布尔代数引论

### Problem 1

设  $B$  是布尔代数,  $B$  中的表达式  $f$  是  $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$ .

(1) 化简  $f$ ;

(2) 求  $f$  的对偶式  $f^*$ .

### Problem 2

设  $B$  是布尔代数,  $\forall a, b \in B$ , 证明:  $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$ .

### Problem 3

设  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  是布尔代数, 在  $B$  上定义二元运算  $\oplus$ ,  $\forall x, y \in B$  有

$$x \oplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

问  $\langle B, \oplus \rangle$  能否构成代数系统? 如果能, 指出是哪一种代数系统. 为什么?

## Problem 4

设  $B$  是布尔代数,  $\forall a, b, c \in B$ , 若  $a \preceq c$ , 则有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

称这个等式为模律, 证明布尔代数适合模律。

## Problem 5

设  $B$  是布尔代数,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$ , 证明:

$$(1) (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \dots \wedge a_n'$$

$$(2) (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \dots \vee a_n'$$

## Problem 6

设  $B$  为布尔代数, 试证明:  $(\forall a, b \in B)(a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a')$ , 其中  $a'$  表示  $a$  的补元.

## Problem 7

设  $B_1, B_2, B_3$  是布尔代数, 证明: 若  $B_1 \cong B_2, B_2 \cong B_3$ , 则  $B_1 \cong B_3$ .

## Problem 8

今有  $x, y, z$  三个布尔变元, 用  $xyz$  表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数  $F$ : 当  $xyz$  是一个斐波那契数时  $F(x, y, z) = 1$ , 否则  $F(x, y, z) = 0$ 。

(1) 给出  $F$  的真值表。

(2) 以“布尔积之布尔和”的形式给出  $F$  的表达式（无需化简）。

(3) 化简该表达式。

## Problem 9

表示布尔函数小项的和称为此函数的积之和展开式, 求布尔函数  $F(\omega, x, y, z)$  的积之和展开式,  $F(\omega, x, y, z) = 1$  当且仅当:

(1)  $x = 0$

(2)  $xy = 0$

(3)  $x + y = 0$

(4)  $xyz = 0$

## Problem 10

(1) 在布尔代数中证明, 幂等律即  $x \vee x = x$  和  $x \wedge x = x$  对于每一个元素  $x$  成立

(2) 证明模性质在布尔代数中成立, 即证明  $x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$   
且  $x \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$