

# 离散数学作业 Problem set 4

## Problem 1

用推理规则证明：如果  $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$  和  $\forall x(P(x) \wedge R(x))$  为真，则  $\forall x(R(x) \wedge S(x))$  为真。

## Problem 2

用推理规则证明：如果  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  和  $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$ ,  $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$  和  $\exists x \neg P(x)$  为真，则  $\exists x \neg R(x)$  为真。

## Problem 3

证明三角不等式：如果  $x$  和  $y$  都是实数，则  $|x| + |y| \geq |x + y|$ 。

## Problem 4

证明如果  $n$  是整数，则下面的 4 个语句的等价的：(i)  $n$  是偶数；(ii)  $n + 1$  是奇数；(iii)  $3n + 1$  是奇数；(iv)  $3n$  是偶数。

## Problem 5

两个实数  $x$  和  $y$  的平方均值是  $\sqrt{(x^2 + y^2)/2}$ 。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

## Problem 6

证明：一个整数的四次方的最后一位必然为 0, 1, 5, 6 中的一个。

## Problem 7

已知  $r$  是一个无理数，证明：存在一个唯一的整数  $n$  满足  $|r - n| < \frac{1}{2}$ 。

## Problem 8

证明在任意 64 天中至少有 10 天在每星期的同一天里。

## Problem 9

使用分情形证明法来证明当  $a$ 、 $b$  和  $c$  都是实数时就有  $\min(a, \min(b, c)) = \min(\min(a, b), c)$ 。

## Problem 10

证明  $\sqrt[3]{2}$  是无理数。