

# 离散数学作业 9-数学归纳法

## 习题 1

设  $P(n)$  是命题:  $n! < n^n$ , 其中  $n$  是大于 1 的整数。

- a) 命题  $P(2)$  是什么?
- b) 证明  $P(2)$  为真, 完成基础步骤的证明。
- c) 归纳假设是什么?
- d) 在归纳步骤中你需要证明什么?
- e) 完成归纳步骤。
- f) 解释为什么只要  $n$  是一个大于 1 的整数, 则上述步骤就可以证明不等式为真。

## 习题 2

- a) 猜想前  $n$  个正偶数之和的公式。
- b) 证明你所猜想的公式。

## 习题 3

用数学归纳法证明平面上过同一点的  $n$  条直线将平面分为  $2n$  个区域。

## 习题 4

试证明：正整数  $n$  和  $n^5$  的最后一位必相同。

## 习题 5

递归定义双斐波那契数列  $D_0, D_1, \dots$  如下：

$$\begin{cases} D_0 = 1 \\ D_1 = 1 \\ D_n = 2D_n + D_{n-1} (n > 1) \end{cases}$$

试证明：

- a) 所有斐波那契数均为奇数。
- b) 任何两个相邻的双斐波那契数均互质。

## 习题 6

通过数学归纳法证明：当  $n > 3$  时， $n$  边凸多边形的对角线数目为  $\frac{1}{2}n(n-3)$ 。

## 习题 7

用强归纳法证明：任意正整数  $n$  都可以写成 2 的不同幂次之和，即可以写成整数的一个子集  $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4$  等的和。（提示：对归纳步骤，分别考虑  $k+1$  是偶数和奇数时的情况。当  $k+1$  是偶数时，注意  $(k+1)/2$  是整数）

## 习题 8

用强归纳法证明：对于任意自然数  $n$ ，存在自然数  $a, b$  满足： $5^n = a^2 + b^2$ 。

## 习题 9

使用良序性证明： $\sqrt{2}$  是无理数。（提示：假设  $\sqrt{2}$  是有理数，则存在整数  $p, q$  满足  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ，同时可以得到  $\frac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$ ）